

Vito F. Maldini

ELEMENTI DI GEOMETRIA

ELEMENTI

DI

G E O M E T R I A

AD USO DEI LICEI

E DEGLI ISTITUTI TECNICI (1 biennio)

DI

GIUSEPPE VERONESE

Professore nella R. Università di Padova

TRATTATI CON LA COLLABORAZIONE

DI

PAOLO GAZZANIGA

Professore nel R. Liceo di Padova



VERONA — FRATELLI DRUCKER — PADOVA

LIBRAI-EDITORI

—
1897

—
PROPRIETÀ RISERVATA
—

.....
PADOVA, TIP. ALL'UNIVERSITÀ DEI FRATELLI GALLINA

Ai Signori Professori

Soltanto dall'esame accurato del testo il lettore potrà farsi un'idea esatta di questi *Elementi*; ma differendo essi più nelle prime che nelle ultime pagine da altri trattati congeneri, parmi opportuno dare ragione delle principali differenze.

In questo secolo la Geometria si è arricchita di importantissimi risultati intorno ai suoi principî, ma gli studî moderni, pur affermando da un canto che l'eleganza geometrica del metodo di Euclide è sempre degna di imitazione, e sollecitando dall'altro canto una riforma dell'insegnamento geometrico nelle scuole secondarie, ispirata al rigore e ai metodi moderni compatibilmente colle esigenze didattiche, hanno avuto finora nessuna od assai scarsa influenza su questo insegnamento.

La mia opera ha lo scopo di conseguire nell'insegnamento della Geometria elementare razionale « quello stretto rigore scientifico » che è vivamente desiderato dai nuovi indirizzi della scienza ed è prescritto dai programmi governativi coordinando con vedute moderne, per quanto è consentito dalle esigenze della scuola, il materiale degli *Elementi* di Euclide, generalmente riconosciuto come quello che nel suo insieme meglio corrisponde agli scopi dell'insegnamento della Geometria nei Licei e negli Istituti tecnici, senza alterare quel metodo geometrico che i programmi vogliono giustamente conservato.

Fin da quando pubblicai i miei *Fondamenti di Geometria* mi parve che un metodo atto a conseguire tale intento fosse quello ivi esposto per la Geometria euclidea *). Con la cooperazione dell'egregio prof. Paolo Gazzaniga pubblicai l'anno scorso una litografia dei primi tre libri, la quale servì a lui di guida nell'insegnamento della Geometria nel R. Liceo di Padova. In seguito a più maturo esame ho rifatta e semplificata questa prima parte allo scopo di renderla sempre più accessibile alla scolaresca.

Uno dei principî ai quali si informano i *Fondamenti* e la detta litografia è quello secondo il quale la retta viene considerata come la figura fondamentale della Geometria, tanto per la costruzione, quanto per la misura delle altre figure; e fu per ciò che diedi nel libro I della litografia tutti i postulati della retta per trarne il maggior vantaggio possibile. Così facendo era però necessario introdurre nel libro I i concetti di segmento indefinitamente piccolo e di segmento limite; ma nella stampa, pur rispettando in massima quel principio, trovai opportuno per ragioni didattiche di differire quei concetti al libro V coi postulati della continuità e di Archimede (XI, XII). Per questo mutamento dovetti dare alcuni postulati in più del necessario, rimandando all'Appendice la dimostrazione di essi.

* * *

Non vi può essere stretto rigore scientifico se non si enunciano tutti i postulati necessari, o se si deducono da alcuni di essi delle conseguenze che dipendono anche da altri sottintesi. Ma se l'intuizione è necessa-

*) Pref. pag. XXXVI-XXXVII.

ria per stabilirli e l'uso frequente di essa è di potente aiuto alla concezione delle verità geometriche, nondimeno manca il rigore scientifico se, astraendo dall'intuizione, del sistema geometrico non rimane un sistema di verità logicamente ben determinato, indipendente cioè dal loro significato geometrico *). Per queste ed altre ragioni liberai fin da principio il ragionamento dai concetti intuitivi di *linea* e di *superficie*, e da altri simili che portano negli enunciati delle proposizioni e nelle dimostrazioni geometriche concetti logicamente indeterminati. Così dico del concetto del movimento dei corpi *senza deformazione*, quando sia usato per definire e dimostrare l'eguaglianza delle figure; il quale, come si può vedere nel libro IV, corrisponde a proprietà geometriche molto complesse. A parte la petizione di principio che si può riscontrare nella definizione dell'eguaglianza per es. di due segmenti rettilinei, tenendo conto delle considerazioni suesposte, ognuno si accorge che il movimento senza deformazione non solo è superfluo, ma restringe altresì il concetto dell'eguaglianza a quello della congruenza **). Non si creda però che io voglia escludere il linguaggio del mo-

*) F. G. pref. pag. XVI.

**) Specialmente dopo i lavori di Helmholtz sui principi della Geometria, il quale dichiara che « non si può parlare di congruenza se non si possono muovere dei corpi rigidi, o sistemi di punti senza deformazione, l'uno verso l'altro » da alcuni si sostiene che questo principio è indispensabile allo svolgimento della geometria e di esso si fa uso più che in Euclide nei trattati moderni di Geometria elementare. Così Newton disse che la Geometria è una parte della Meccanica. Come si vedrà in questo libro, il movimento senza deformazione è invece un mezzo pratico non necessario per lo sviluppo della Geometria; anzi le leggi di esso si deducono da leggi geometriche. Vedi la nota XX dell'appendice i F. G. pref. pag. XXXV, XXXVI, ecc.

vimento; solo sostengo che prima di farne uso nel ragionamento deve esserne spiegato il senso geometrico preciso. Similmente se il sistema logico geometrico vuol essere indipendente dall'intuizione, ciò non significa che la vogliamo bandire dall'insegnamento; tutt'altro, desideriamo anzi che ogni proposizione ed ogni ragionamento siano continuamente vivificati dall'intuizione spaziale mediante l'osservazione di figure o modelli che aiutino lo svolgimento della imaginativa geometrica, sì che il ragionamento stesso appaia agli alunni conseguenza più dell'intuizione che di una logica arida ed astratta. È perciò che nelle osservazioni empiriche premesse ai postulati o a qualche definizione, si ricorre a concetti intuitivi, come a quelli di linea, di superficie e di movimento senza deformazione per far meglio comprendere i postulati e le definizioni stesse. Ma nell'enunciato delle proposizioni e nelle dimostrazioni sono svolti soltanto i concetti contenuti nei postulati e logicamente determinati. D'altro canto non ho creduto di scendere a troppi minuti particolari, i quali, se sono utili per la critica scientifica, fanno perdere però di vista ai giovani le verità principali, delle quali « essi devono ricevere e conservare una forte e durevole impressione »*). Tuttavia le lacune che si riscontrassero in questo senso possono essere colmate colle considerazioni svolte o nella Appendice o nei Fondamenti.

Già nella prefazione di questi avevo manifestato la convinzione che per trattare bene il problema didattico della Geometria elementare razionale bisognasse conoscere a fondo le relazioni dei postulati e delle loro principali conseguenze. E poichè i pregi principali di un libro scolastico sono la precisione, la chiarezza e la brevità, alle quali talora bisogna

*) Istruzioni sui programmi governativi, 1894.

sacrificare alcuni sviluppi scientificamente opportuni, ognuno vede come alle difficoltà dello studio scientifico dei postulati si aggiungono anche quelle di indole didattica *). Il metodo vuol essere perciò elementare e svolto col processo costruttivo dell'intuizione spaziale, avendo di mira che la Geometria euclidea elementare è principalmente di natura *metrica*, a base della quale sta il concetto dell'eguaglianza. Sicchè i postulati hanno da esprimere anche scientificamente delle proprietà semplici ed evidenti che possano essere verificate direttamente sugli oggetti esteriori, oppure delle ipotesi che non contraddicono alle premesse e alle loro conseguenze, e tanto nell'uno quanto nell'altro caso siano indimostrabili colle premesse o gli uni mediante gli altri. Anche didatticamente si deve cercare di ridurre i postulati al minor numero possibile, fin che ciò non richieda degli sviluppi poco convenienti agli scopi dell'insegnamento o non abbastanza facili nel principio di esso. Ho rimandato perciò, come ho detto, i post. XI e XII al libro V, mentre potevano essere dati nel libro I, risparmiando i postulati III, VIII e IX; ed ho dati due postulati XIII, XIV per l'equivalenza, l'uno per le figure poligonali (e parti poligonali di esse) l'altro per le figure poliedriche (e parti poliedriche di esse), mentre sono proposizioni dimostrabili; non così facilmente però come si è recentemente creduto **). Gli

*) Questo accordo fra le questioni scientifiche relative alla matematica elementare e l'insegnamento di essa, fu da me sempre propugnato e svolto, per quanto il tempo me lo consentisse, nelle conferenze da me tenute nel triennio 1891-1894 nella Scuola di Magistero di matematica annessa all'Università di Padova, non già allo scopo che i giovani ne facciano sfoggio nel futuro loro insegnamento ma perchè acquistino il sicuro possesso della materia che dovranno insegnare.

**) Vedi l'appendice note XXVI-XXVII.

altri postulati I, II, IV, V, VI, VII, X e XI sono fra loro indipendenti, ma non tutte le parti di alcuni di essi. E quanto al numero dei postulati non si può dire che un sistema sia più semplice di un altro, perchè ne contiene un minor numero; chè anzi può essere più complesso. Ad es. il postulato dato ordinariamente per l'equivalenza riguarda molte più figure di quelle considerate dai due postulati XIII e XIV di questo trattato, tanto è vero che nel testo esso è dimostrato per il cerchio e per i corpi rotondi. I postulati indipendenti qui dati, tranne quello delle parallele, espresso in modo diverso, sono contenuti in quelli degli altri trattati che seguono il metodo Euclideo, mentre in essi non sono contenuti molti dei postulati che si ammettono ordinariamente. Nè ciò, come è facile persuadersene, ha richiesto una maggiore mole del libro in confronto di altri già in uso nelle nostre scuole.

I postulati sono distinti nel testo in due categorie; in postulati necessari, o ritenuti tali, e sufficienti allo svolgimento logico della Geometria, e in postulati pratici (quello delle tre dimensioni dello spazio esteriore e quello del movimento senza deformazione), necessari coi primi alle pratiche applicazioni di essa *). Come postulato pratico poteva essere considerato anche quello d'Archimede (XII) se ciò non avesse avuto per conseguenza un maggiore svolgimento del testo.

Neila prefazione dei Fondamenti e altrove ho sostenuto che le ragioni della verità e dell'indipendenza dei postulati si devono ricercare piuttosto nelle leggi del pensiero logico eccitato dall'osservazione, che nella sola osservazione esterna; ma questo metodo per le ragioni già esposte non può essere accolto in un trattato scolastico elementare.

*) F. G. pag. XVI.

A stretto rigore, non si potrebbero dare quindi i postulati in un tale trattato che per figure corrispondenti agli oggetti che si possono osservare. Ma anche questo metodo richiederebbe delle restrizioni e distinzioni poco confacenti all'insegnamento. Pur essendo qui enunciati i postulati per la retta illimitata (e quindi anche per il piano e lo spazio illimitati), essi soddisfano al principio che tutti i postulati sono tratti direttamente da oggetti sensibili, in guisa che essi e le loro conseguenze possono essere riguardati, con alcune restrizioni, come valevoli soltanto per la figura corrispondente al campo della nostra osservazione esterna. Nell'Appendice sarà dimostrato che i postulati II e V, XI e XII possono essere ammessi per la retta illimitata e che gli altri postulati valgono in tutto lo spazio illimitato. È per questo che non potevamo esprimere il postulato delle parallele definendo le parallele come quelle rette del piano che prolungate indefinitamente non si incontrano mai, perchè due tali rette nessuno le ha mai vedute. D'altra parte dovevamo rendere il postulato indipendente dal piano, di cui dimostriamo le proprietà fondamentali. Così pure non potevamo dare il postulato che la retta viene divisa da un suo punto in due parti (che è conseguenza di quello delle parallele) e finalmente quello generale e poco intuitivo, da altri usato, che due grandezze variabili convergenti ammettono sempre una grandezza limite.

*
* *

Quanto alle innovazioni di metodo osservo anzi tutto che mi sono valso di un principio moderno (che se non erro non fu ancora applicato all'insegnamento elementare), secondo il quale data una figura *A* mediante alcuni postulati e un'altra figura *B*, in tale corrispondenza con *A* che collo

scambio di alcune parole valgono per B le proposizioni contenute nei postulati di A ; per B si deduce che collo scambio di quelle parole, valgono, anche colle stesse dimostrazioni tutte le proposizioni dedotte per A^*). Ad es. dati i postulati della retta (considerata in sè), cioè II, XI e XII, e dimostrate pel fascio di raggi, per la circonferenza e pel fascio di piani le proposizioni ottenute da essi collo scambio di alcune parole, valgono pure per queste figure le proposizioni della retta dedotte da quei postulati. Così per la stella di rette valgono le proprietà che, mutando alcune parole, derivano dai postulati, dai quali si deducono le proprietà del piano, tranne quello delle parallele; di guisa che si possono enunciare senz'altro per la stella i teoremi del piano indipendenti da quel postulato, valendosi delle stesse dimostrazioni quando o esse siano indipendenti dal postulato o siano basate su proprietà comuni al piano e alla stella, anche se la loro dimostrazione per il piano sia stata data coll' aiuto delle parallele.

Un tale metodo, che ritengo assai vantaggioso anche didatticamente, prova che non è sempre indifferente ammettere un numero maggiore o minore di postulati, perciocchè se ad es. per la retta si desse un altro postulato oltre quelli del testo, per estendere al fascio di raggi, alla circonferenza e al fascio di piani le proposizioni dedotte dai postulati della retta, bisognerebbe dimostrare per ciascuna di quelle figure la proposizione contenuta nel postulato suddetto.

Così ho cercato di trar profitto da tutte le analogie possibili fra teorie diverse; ad es. da quella che ha luogo fra le figure eguali e le figure simili, sicchè parecchi dei

*) Egli è su questo ovvio principio generale che trova la sua giustificazione il principio di dualità nella Geometria proiettiva.

teoremi di queste derivano con le loro dimostrazioni da teoremi di quelle sostituendo alla corrispondenza di eguaglianza la corrispondenza di proporzionalità. Questa è un'altra prova dell'utilità che si trae dal sostituire la corrispondenza di eguaglianza al movimento senza deformazione nella dimostrazione dell'eguaglianza di due figure.

Nel libro III sono introdotte le locuzioni di punto, retta e piano all'infinito al fine di rendere più generali alcune proposizioni e più semplici le loro dimostrazioni, senza bisogno di considerare tanti casi particolari dello stesso teorema o della stessa dimostrazione. Sono locuzioni queste della geometria proiettiva che ritengo utili alla trattazione delle proposizioni di posizione della Geometria elementare. Occorre però evitare ogni equivoco, mostrando cioè che i punti all'infinito si possono sostituire a quelli effettivi nella determinazione della retta e del piano, onde per il principio suesposto valgono per essi soltanto quelle proposizioni che si possono dedurre da siffatta determinazione. L'uso degli elementi all'infinito è fatto però sempre con speciale avvertenza, e soltanto laddove riesce utile la loro considerazione*).

Nei migliori trattati italiani si è già introdotto il concetto di limite, che in alcuni libri esteri si nasconde, male a proposito, sotto il concetto del numero irrazionale. Qui la nozione di limite è ridotta allo stretto necessario ed è data nella sua forma più intuitiva (§ 1 lib. VI).

Sebbene l'indirizzo di questi Elementi sia nuovo, pur non ho cercato mai di mutare per amore di novità, ma solo

*) Questi punti impropri all'infinito non sono da confondersi coi punti all'infinito attuale dei F. G.

quando ciò mi è parso utile per qualche parte del libro. Ad es. nel § 4 del libro II si potrebbero seguire senz'altro le dimostrazioni ordinarie; ma pel teor. I del num. 27 si deve mutar metodo, perchè ordinariamente questo teorema si dimostra ricorrendo ad altre proposizioni la dimostrazione delle quali si basa o sulla retta infinita, o sulla somma degli angoli di un triangolo, se non si ammette poco opportunamente, come Legendre, il postulato che il segmento rettilineo è minore di ogni altra linea avente gli stessi estremi. Di tali dimostrazioni non si potrebbe però valersi per la stella nel modo sopra indicato, nè si potrebbe estendere senz'altro ai triedri la maggior parte delle proposizioni colle relative dimostrazioni date pei triangoli nel § 5 del libro II.

I postulati sono tanto più semplici quanto più semplice è l'ente a cui si riferiscono, e sotto tale aspetto la così detta fusione della Geometria solida colla piana non è scientificamente possibile finchè non siano costruiti il piano e lo spazio, e dimostrate le loro proposizioni fondamentali. Nei miei lavori geometrici io sono stato fautore non solo della fusione della geometria dello spazio ordinario con quella del piano, ma eziandio di quella degli spazi superiori con gli inferiori, perchè appunto lo studio delle proprietà proiettive di questi trova per mezzo di quelli la sua più completa e più alta estrinsecazione, tuttavia non posso non riconoscere che la Geometria solida è in questo senso di poco aiuto alla Geometria elementare del piano e della retta, perchè questa, come dissi, è per sua natura metrica. Ho dato però nella dimostrazione del teor. VI del num. 38 un esempio di tale fusione che ha servito al De Paolis per dare la dimostrazione di una costruzione del pentagono regolare indipendentemente dalla equivalenza e dalle proporzioni. D'altronde sono anche di-

scordi i pareri sulla opportunità didattica della trattazione simultanea della Geometria piana e solida, che fu tentata negli ultimi anni anche in Italia da egregi autori. Per parte mia ritengo che nel primo insegnamento della Geometria sia di regola più utile procedere dal particolare al generale e dal semplice al composto. Ciò che però riesce senza dubbio utile anche didatticamente è la trattazione simultanea delle teorie speciali, dopo aver premesse le proprietà generali della retta, del piano e dello spazio, cioè le teorie della congruenza e simmetria, della equivalenza, delle proporzioni, delle figure simili e della misura; raccogliendo così in un solo capitolo le proprietà della retta, del piano e dello spazio che dipendono dagli stessi principî. In tal modo non solo si consegue nell'insegnamento un notevole risparmio di tempo, ma ciò che più importa, lo scolaro comprende meglio le relazioni che sussistono fra le figure piane e le solide raccolte nello stesso capitolo e s'accorge di leggeri che molte dimostrazioni date per le seconde sono una facile estensione di quelle date per le prime. Con ciò è possibile ovviare all'inconveniente da alcuni lamentato, che cioè, al contrario di quanto avviene nell'Istituto tecnico, nel Liceo non si svolgono alla fine della classe I o in principio della classe II le proprietà delle figure solide utili ad alcune parti della Fisica e della Cristallografia. Che se l'insegnante anche per le teorie speciali sopra nominate credesse di dover premettere tutta la Planimetria, potrà pure seguire questi Elementi, perchè le proprietà delle figure piane sebbene siano trattate nello stesso capitolo con quelle analoghe delle figure solide, sono però enunciate separatamente *).

*) Le istruzioni dei programmi del 1894 pei Ginnasi e pei Licei oltre che non prescrivono il testo euclideo mentre prescri-

I programmi prescrivono giustamente il metodo euclideo che « si riassume nell'esclusione di ogni sussidio aritmetico o algebrico prima del trattato della misura ». Con ciò s'intende che non si faccia uso, come sogliono alcuni trattati, specialmente francesi e tedeschi, di proprietà dei numeri estendendole senza alcuna giustificazione alle grandezze geometriche, e tanto meno di operazioni aritmetiche e algebriche.

L'aver trattato nel libro I della somma e della differenza di due segmenti rettilinei e accennato ai multipli e summultipli di un segmento rettilineo, non significa che siasi alterato il metodo geometrico. Nel testo infatti fino al libro IX non si ammette che la nozione dei numeri interi ordinari. Nella teoria delle proporzioni invece di esporre sempre in parole certe operazioni geometriche, le indico per maggiore semplicità con simboli (che poi nella teoria della misura diventano numeri) allo stesso modo che col simbolo $a n$ essendo a un segmento e n un numero intero, si indica il segmento multiplo di a secondo il numero n . Ciò permette di ottenere una notevole semplificazione nella teoria delle proporzioni.

Quanto alla esposizione ho scelto una via media, nè troppo estesa nè troppo concisa. Nei primi libri le dimostrazioni sono complete, in seguito alcuni corollari sono dati senza

vono il Libro I nel ginnasio superiore, lasciano al discernimento dal professore l'ordine della materia da seguirsi in ciascun corso. Se una maggiore estensione non è certo una questione di grande importanza pel Ginnasio - Liceo, occorre però sia mutato l'ordine della materia in quanto riguarda almeno la teoria dell'equivalenza, come è mutato del resto in tutti i trattati moderni che io conosco.

dimostrazione perchè facili conseguenze di teoremi precedenti, e di certi teoremi si è accennato che le dimostrazioni sono analoghe a quelle di altri teoremi quando si ottengono da queste collo scambio già indicato di alcune parole. Come i postulati sono dati quando se ne presenta la necessità, così le definizioni sono date immediatamente prima, o più spesso dopo che si è dimostrata l'esistenza delle figure a cui si riferiscono, di guisa che l'alunno comprende meglio la necessità delle definizioni e più facilmente le ritiene.

Non è qui il luogo di dire come deve essere insegnata la Matematica elementare; solo è da avvertire che l'insegnante insista con amore e con cura sui concetti e sulle proposizioni fondamentali, acciò la scolaresca se ne impossessi e le applichi alla dimostrazione di semplici teoremi e alla risoluzione di facili problemi con speciale riguardo a quelli di più frequente applicazione. Ma se si vuole che lo studio della Matematica contribuisca a sviluppare nei giovani l'attitudine a pensare scientificamente e ad accendere in essi l'amore alla scienza è necessario il frequente esercizio *). Un esercizio utile sarà quello che gli scolari svolgano per intero le dimostrazioni accennate ad es. per i triedri, che si ottengono da quelle dei triangoli seguendo l'esempio dato nel testo pel teor. I del num. 46. In questo modo nella mente del giovane rimarrà impressa non

*) Se è falso il pregiudizio che occorra una disposizione speciale per comprendere la matematica elementare, che segue nel suo sviluppo le leggi semplici e chiare del pensiero logico, e per farne delle semplici applicazioni; fa d'uopo però che l'alunno sia costretto a studiarla sin da principio sotto la guida del docente con attenzione a diligenza.

soltanto la forma, ma eziandio la sostanza dei principali ragionamenti e delle idee cardinali sulle quali si appoggiano. Alla fine del libro sono indicati parecchi esercizi, ordinati paragrafo per paragrafo, e scelti in modo da soddisfare ai vari scopi ai quali devono servire.

Al testo seguirà l'Appendice che conterrà lo svolgimento delle note in esso indicate con numeri romani, e nella quale saranno dimostrate le proposizioni date come postulati in più del necessario. Questa Appendice di carattere scientifico, sebbene elementare, sarà pubblicata a parte e destinata ai professori e ad altri studiosi. Credo però che gioverebbe se alla fine dell'insegnamento della Geometria elementare, specialmente del Liceo, fosse richiamata brevemente l'attenzione dei giovani sulle relazioni che hanno luogo fra le diverse proposizioni fondamentali di essa e la forma geometrica del mondo esterno. Si farebbe così un po' di sintesi utile e dilettevole della scienza nel senso più proprio e più preciso.

* * *

Ho già detto che nella compilazione della litografia dei primi tre libri ebbi il consiglio illuminato e l'aiuto premuroso del professore Gazzaniga. Per la stampa di tutto il libro egli continuò a prestarmi l'opera sua allo scopo di renderlo più agevole agli alunni delle scuole secondarie, curando come la forma e il metodo di esposizione. Egli mi aiutò altresì nella revisione e trascrizione del manoscritto e nella correzione delle prove di stampa, e sebbene quale autore io assuma l'intera responsabilità del libro ho da riconoscerlo e ringraziarlo per questi titoli quale mio collaboratore. In nome suo aggiungo che i risultati da

lui ottenuti in più di due anni nell'insegnamento di questi Elementi sono ottimi e che il metodo di essi viene appreso dai giovani a preferenza di altri e più facilmente di quello che si sarebbe aspettato. Occorre però che i concetti fondamentali siano dati poco per volta e che le dimostrazioni siano svolte con pazienza e con cura. Certe proposizioni, come sarà indicato nelle Avvertenze, o per mancanza di tempo o per altre circostanze, potranno essere fatte leggere solamente, essendo di per sè evidenti, ed altre potranno essere tralasciate *).

Ho da ringraziare anche tutti quegli insegnanti che esaminando la litografia dei primi tre libri mi furono cortesie di aiuto per la migliore riuscita del lavoro, e fra essi devo ricordare in modo speciale il prof. Corrado Chamberlini del R. Liceo di Fermo, il quale vide anche gran parte del manoscritto dei libri rimanenti, e mi fece delle osservazioni assennate, specialmente intorno alla semplificazione di alcune dimostrazioni, che in parte ho accolte nel testo. Ed anche di quelle osservazioni che mi furono fatte da altri e non potei accettare, mi giovai per rendere più chiara la dizione di alcuni punti del testo.

Le ricerche puramente scientifiche sui principî della Geometria sono difficili di per sè e domandano tempo e sacrificî non lievi. Se i concetti generali vi attraggono, i particolari, che pur sono necessari, vi affaticano; tanto più che non sempre le idee e i metodi nuovi si presentano dapprin-

*) Sarà opportuno che i giovani siano invitati, dopo la lezione in classe o dopo aver studiata a casa la lezione nel testo, a rifare a parte le figure e a ripetere le proposizioni e le dimostrazioni senza l'aiuto del testo.

cipio allo spirito nella forma più limpida ed elegante. Ma queste ricerche sono rese ancor più difficili dai pregiudizî inveterati che le attraversano quando si allontanano dai metodi e dalle idee predominanti. Molti di coloro che hanno già fatto l'abito di vedere superficialmente queste cose sotto un determinato aspetto, difficilmente vi seguiranno, e sarete fortunati se non vi prenderanno per metafisici visionari o se, per dare ad intendere che hanno letto e compreso il vostro lavoro, non getteranno con parole ambigue il discredito sull'opera vostra sfuggendo però dal darvi qualsiasi doverosa spiegazione. Siffatte ricerche speculative sui principî della Geometria non dovete dunque tentarle, se non quando credete di adempiere ad un dovere verso la scienza, per quanto lo consentano le vostre forze, contentandovi della sola intima soddisfazione che dà l'opera compiuta.

Se la novità è un ostacolo per la pronta diffusione di queste ricerche scientifiche, a maggior ragione lo è per quella di un'opera scolastica. Ho posto ogni cura nel tener conto delle esigenze didattiche; ma non è certo per la speranza di fama o di lucro che ho impiegato tanto tempo in questa non affatto agevole impresa ; perchè avrei potuto dedicarlo a studi forse più graditi, e perchè, come ben disse il Cremona, in Italia non accade sempre che un libro non pessimo trovi fortuna. Ho fatto il Libro nella sola speranza che esso porti un non spregevole contributo alla soluzione del problema dell'insegnamento della Geometria elementare, e che i professori imparziali e volenterosi delle scuole secondarie superiori i quali hanno fede nel moto progressivo della scienza e non hanno l'animo preoccupato da pregiudizî esaminino l'opera mia con benevolenza, e se la trovano buona nel suo insieme, come io spero, ne tentino l'esperimento.

Nonostante tutte le cure perchè il libro riuscisse meglio che fosse possibile, può darsi che si trovino qua e là delle mende, scusabili in parte in una prima edizione. In tal caso, come accetterò di grato animo le osservazioni della critica imparziale e diligente, così gradirò i consigli cortesi dei professori acciocchè il libro meglio raggiunga il suo scopo, se ad esso toccherà l'onore di una ristampa.

Padova, 15 Dicembre 1896

G. VERONESE

AVVERTENZE

- I. — Premettendo nell'insegnamento tutta la Planimetria alla Stereometria sarà opportuno di dare dopo il num. 36 il post. X e il teor. X, 39 coll'oss. relativa.
- II. — Proposizioni che possono esser lette senza dimostrazione : Teor. I, 7 ; Teor. I, IV, 21 ; Teor. I, Lem., Teor. III e cor. 23 ; Teor. I, II, III, 24 ; Lem. Teor. IV, V e cor. 44 ; Teor. I, 49 ; Teor. I, cor. Teor. II, 50 ; Teor. IV, 92 ; Teor. IV e V, 94 ; Teor. II, 96.
- III. — Proposizioni che possono essere tralasciate nell'insegnamento liceale se il tempo fa difetto.
- LIBRO II. — Teor. XI, XII e XIII, 28 e per conseguenza i Teor. I e II, 35 ; Teor. IV, 35.
- LIBRO III. — Teor. VI e cor. 38 ; oss. Teor. I e cor., Teor. II, 47 ; Teor. II, III, IV, V, VI, 49 ; Teor. VII e def. VI, oss. V, VI, 52 ; Teor. III, 53 ; Teor. VI, def. X, Teor. VII e cor. 54 ; tutto il num. 55 ; def. I, Teor. I e II, 56.
- LIBRO IV. — Teor. I, II, 60.
- LIBRO V. — Teor. II, 73.
- LIBRO VI. — Del Teor. III, 75 si possono dimostrare i tre primi casi dando un cenno della dimostrazione dei rimanenti. Teor. IV, 76 ; Teor. I, 78 ; Teor. II e Probl. I, 80 ; Probl. II, 83 ; Teor. II, III, 84 ; il numero 85 ; Teor. III, 10 e i cor. IV e V del Teor. IV ; Teor. V e cor. I, II, III, 88.
- LIBRO VII. — Tutto il § 2.
- LIBRO VIII. — Teor. II, III, 94.
- LIBRO IX. — Alcuni dei problemi del § 5.
- Non si sono indicati qui alcuni teoremi, come ad es. i teor. VI, VII. 27, IV, VI, 45 ; I e II, 64, perchè quantunque non siano indicati nei programmi nè negli Elementi di Euclide pur tuttavia sono proposizioni importanti perchè fanno meglio conoscere la costituzione degli enti a cui si riferiscono.

Nel 1. biennio dell'Istituto tecnico potranno essere tralasciate quelle fra le proposizioni accennate che non lo sono nei programmi governativi. Qui s'è voluto indicare soltanto alcune proposizioni che possono essere tralasciate e di cui non si ha bisogno per la dimostrazione delle altre proposizioni del testo, ma è lasciata al discernimento dell'insegnante la scelta di esse.

INDICE

Prefazione e Avvertenze	pag.	v
Nozioni generali		i

LIBRO I.

§ 1. Prime proprietà delle rette	7
* § 2. Figure eguali	22
§ 3. Rette parallele	29

LIBRO II.

§ 1. Prime proprietà del piano	34
§ 2. Parti del piano determinate da una retta e da un triangolo.	46
§ 3. Trasversali di rette parallele e rette perpendicolari	52
§ 4. Distanze	57
§ 5. Altre proprietà dei triangoli	63
§ 6. Poligoni	72
§ 7. Circonferenza e cerchio	78
§ 8. Punti comuni a due circonferenze	88
§ 9. Angoli e poligoni nel cerchio	92
§ 10. Problemi elementari	98

LIBRO III.

§ 1. Prime proprietà dello spazio	105
§ 2. Diedri	116
§ 3. Rette e piani perpendicolari	118
§ 4. Rette e piani paralleli	127
§ 5. Parti dello spazio rispetto ad un piano	132
§ 6. Distanze ed angoli	135
§ 7. Angoloidi	140
§ 8. Poliedri	152
§ 9. Cono e cilindro	162
§ 10. Sfera.	170

LIBRO IV.

§ 1. Altre proprietà delle figure eguali	181
§ 2. Versi delle figure	187
§ 3. Figure congruenti e simmetriche	192
§ 4. Movimento delle figure	197

LIBRO V.

§ 1. Continuità della retta	203
§ 2. Generalità sulle figure equivalenti	209
§ 3. Figure poligonali equivalenti	214
§ 4. Relazioni fra i lati del triangolo	226
§ 5. Figure poliedriche equivalenti	231

LIBRO VI.

§ 1. Sistemi lineari di grandezze	243
§ 2. Grandezze proporzionali	256
§ 3. Segmenti proporzionali	267
§ 4. Figure simili	278
§ 5. Altre proprietà di poligoni e di poliedri simili ed equivalenti	288

LIBRO VII.

§ 1. Poligoni regolari	301
§ 2. Poliedri regolari	307

LIBRO VIII.

§ 1. Lunghezza della circonferenza e area del cerchio	313
§ 2. Superficie e volumi del cilindro e del cono	322
§ 3. Superficie e volume della sfera.	327

LIBRO IX.

§ 1. Grandezze commensurabili e grandezze incommensur.	339
§ 2. Generalità nella misura delle grandezze	343
§ 3. Misura delle lunghezze, delle aree e dei volumi	346
§ 4. Unità di misura comunemente adottate	351
§ 5. Applicazioni dell'Algebra alla Geometria	353
Esercizi	363
Errata-Corrige	391

GAETANO RIBONI

dono

ELEMENTI DI GEOMETRIA

AD USO

DELLE SCUOLE SECONDARIE SUPERIORI

QUINTA EDIZIONE

CON AGGIUNTE E CORREZIONI

45449



BOLOGNA

NICOLA ZANICHELLI

FIRENZE - ROMA - MILANO - R. Bemporad & F.

TORINO - S. Lattes & C. — GENOVA - Edoardo Spiotti

NAPOLI - Fratelli Treves

PROPRIETÀ LETTERARIA

Stab. Tip. A. Cacciari - Bologna.

PRELIMINARI

§ 1.º Gli enti geometrici - Postulati.

1. L'osservazione dei corpi naturali fa nascere in noi l'idea dello *spazio*.

Non sapendo concepire limiti allo spazio, diciamo che esso è *illimitato*; e poichè esistono innumerevoli corpi, che si muovono per ogni verso, ed *al di là* ⁽¹⁾ di essi altri ne possiamo concepire quanti si vogliano, diciamo che 'lo spazio è *infinito*, e non presenta interruzioni, cioè è *continuo*.

2. Ogni corpo occupa una parte di spazio, cioè ha una particolare *estensione*, e presenta un particolare aspetto o *forma*.

3. La Geometria studia nei corpi l'estensione e la forma, e per questo non è necessario tener conto della materia di cui i corpi sono costituiti;

⁽¹⁾ Il est dans la nature de l'esprit humain d'aller toujours au delà de ce que les sens lui présentent. Aussi, quoiqu' il ne connaisse par leur moyen que des corps très-limités, conçoit-il la possibilité que ces limites soient beaucoup moins resserrées, et ne voit-il même aucune borne assignable à leur étendue, soit idéale, soit même matérielle.

DUHAMEL: *Des méthodes dans les sciences de raisonnement*, deuxième partie, pag. 4).

così che in Geometria dicendo *corpo* o *solido* s'intende l'*immagine* del corpo naturale, astrazion fatta dalla materia, immagine che si confonde colla parte di spazio da esso occupata.

4. I corpi differiscono l'uno dall'altro in generale, sia per la estensione che per la forma. Così ognuno sa che significa un corpo *più grande* di un altro; come pure ognuno fa distinzione tra la forma di una palla, per es., e quella di un dado.

Due corpi possono avere la stessa estensione pur differendo nella forma: ne danno l'idea ad es. le capacità di due vasi diversamente foggiate e che possono essere riempiti da una stessa quantità di liquido: in questo caso i due corpi si dicono *equivalenti*. Possono avere invece la stessa forma, differendo nella estensione, come ad es. quelli raffigurati da due palle di diversa grossezza; e allora si dicono *simili*. Infine se non differiscono nè nella estensione, nè nella forma, talchè si confondono l'uno coll'altro, sono *eguali*. Su questi concetti puramente intuitivi torneremo più innanzi per dar loro una forma più razionale.

5. Tornando all'estensione, occorre di dover considerare nei corpi questa proprietà sotto diversi aspetti. Così, per es., le pareti di una camera, le facce della lavagna su cui scriviamo, una regione ecc. hanno una estensione, che non è quella dei corpi da esse limitati: anzi le medesime possono essere considerate a sè, come indipendenti dai corpi stessi; e si dicono *superficie*.

Così pure gli spigoli delle pareti, gli orli delle facce della lavagna, i confini di una regione ecc. hanno una estensione che non è quella delle su-

perficie da esse limitate: detti spigoli od orli o confini possono essere considerati a sè, come indipendenti dalle superficie stesse, e si dicono *linee*.

Anche qui, facendo astrazione dai corpi che danno il concetto di questi diversi modi di estensione, si hanno le superficie e le linee geometriche: ed in analogia a quanto si è osservato pei corpi materiali, si dice che la superficie è ciò che limita un corpo, la linea ciò che limita una superficie. Là poi dove termina una linea si ha il *punto*. Un punto non ha estensione di nessuna materia.

6. Le idee di superficie, di linea, di punto vengono anche fornite da certi corpi materiali, Così, per es., un foglio di carta sottilissimo, un velo liquido danno l'idea di superficie: un filo sottilissimo, un raggio luminoso l'idea di linea: infine un granello di polvere, una piccolissima macchia la idea del punto, quando si pensi diminuita la loro grossezza fino a renderla nulla.

7. Riassumendo adunque, gli enti studiati dalla geometria sono:

Il *corpo* o *solido*, che, come si è detto, è l'immagine del corpo materiale, che si confonde colla parte di spazio occupata dal corpo stesso. Un corpo si può pensare decomposto in parti.

La *superficie*, che è ciò che limita un corpo, o che in generale separa due parti di un corpo. Una superficie si può pensare decomposta in parti.

La *linea*, che è ciò che limita una superficie, o che in generale separa due parti di una superficie. Una linea si può pensare decomposta in parti.

Il *punto*, che è ciò che limita una linea, o che

separa due parti di una linea. Il punto non è decomponibile in parti.

I solidi, le superficie, le linee hanno estensione, perchè si possono pensare decomposti in parti: i punti non hanno estensione, perchè indecomponibili.

8. Un solido si può pensare decomposto in parti in infiniti modi diversi, perciò diciamo che in un solido vi sono infinite superficie: analogamente diciamo che in una superficie vi sono infinite linee ed in una linea infiniti punti ⁽¹⁾.

9. Si possono pensare superficie non limitate da alcuna linea, come ad esempio quella rappresentata da una palla; così si possono pensare linee non limitate da punti, come quella rappresentata dall'orlo di un disco. Non sappiamo invece concepire solidi non limitati da superficie.

10. Dicesi *figura* un complesso di enti geometrici, cioè di corpi, superficie, linee, punti.

11. Per lo studio delle figure conviene approfittare del *movimento*. L'idea del movimento è data dai corpi naturali. In accordo coll'esperienza (fin dove è possibile) noi *ammettiamo* adunque:

1.° *che una figura geometrica possa muoversi, ed in modo che un suo punto venga a coincidere con un punto fissato qualsiasi.*

2.° *che una figura possa muoversi, conservando fermo un punto.*

In questo caso si dice che la figura *ruota* intorno a quel punto.

(1) Non si può dire però che il solido sia *composto* di superficie, nè la superficie di linee, nè la linea di punti.

3.º *che una figura possa muoversi anche conservando fermi due punti.*

Ammettiamo infine che le figure siano *pene- trabili*, cioè che una stessa parte di spazio possa essere occupata contemporaneamente da due o più figure. Ciò veramente non è in accordo coll' espe- rienza, perchè i corpi materiali sono impenetrabili; ma è del tutto in armonia colla natura astratta delle figure geometriche: e d'altra parte agevola di molto lo studio delle figure stesse.

12. Quando una figura si muove, ciascun suo punto (in generale) va a coincidere successiva- mente con punti diversi dello spazio, che diremo le *posizioni* diverse del punto mobile.

E diremo *posizione di una figura* l'insieme delle posizioni dei suoi punti.

Si ammette che una figura mobile *F* possa ri- prendere una posizione già occupata, tornando cia- scuno dei suoi punti nella primitiva sua posizione; e che se un'altra figura *F'* può prendere una delle posizioni di *F*, la stessa figura *F'* possa prendere anche le altre posizioni della *F*.

Due posizioni diverse di una figura mobile si possono adunque considerare come due figure tali, che a ciascun punto dell'una ne *corrisponda* uno particolare dell'altra, chiamando *corrispondenti* due punti che sono due posizioni diverse dello stesso punto mobile ⁽¹⁾.

13. Diremo *eguali* due figure, che possono con- siderarsi come due posizioni diverse di una stessa figura.

(1) Se qualche punto non si è mosso, quel punto corri- sponde a sè stesso.

Ne consegue:

1.° *Se una figura F_1 è eguale ad una figura F_2 , la F_2 è eguale alla F_1 .*

Il che equivale a dire che se la figura F_1 può prendere la posizione F_2 , questa (per quanto si è ammesso al n. 12) può prendere la posizione di F_1 .

2.° *Due figure eguali ad una terza sono eguali tra loro.*

Se le figure F_1 ed F_2 sono eguali alla figura F_3 sono eguali tra loro. Infatti le figure F_1 ed F_2 possono prendere entrambe la posizione di F_3 , dunque F_1 può prendere una posizione di F_2 (cioè F_3), ossia F_1 è eguale a F_2 .

14. Partendo ora dall'idea del punto si può tornare alle idee di linea, di superficie, di corpo per mezzo del movimento; e renderle anzi più generali.

Si *ammette* che un punto mobile generi una linea, cioè che l'insieme delle posizioni di un punto mobile sia una linea; una linea mobile (in generale) una superficie; una superficie mobile (in generale) un corpo: e se si pensa che tali movimenti continuino senza fine, si avrà l'idea di linea indefinita, di superficie indefinita, di corpo indefinito.

15. Ritornando per un momento su quanto si è detto, i corpi, le superficie, le linee non sono cose realmente esistenti; non si vedono, nè si toccano, vale a dire non impressionano i nostri sensi; ma sono creazioni della nostra mente: solo esistono delle cose, che ce ne danno l'idea.

Per procedere al loro studio conviene adunque che cominciamo col dichiarare quelle proprietà, che riteniamo le più semplici e primitive, e che servono a distinguere un corpo da un altro, una su-

perficie da un'altra, una linea da un'altra. Queste proprietà ci sono rivelate dalle somiglianti di quei corpi materiali, che ci danno l'idea degli enti stessi.

16. Si chiamano *postulati* gli enunciati di queste verità primitive, che, ripetiamo, sono per noi evidenti, in quanto ci vengono attestate dall'esperienza ⁽¹⁾.

Così abbiamo enunciati dei postulati dicendo che s'intende per corpo, superficie, linea, punto; così pure quando si è detto del movimento delle figure e dei diversi suoi modi, e così via.

Quando si spiega il significato d'una parola o d'una frase per mezzo di parole naturalmente note, si dice che si dà la *definizione* di quella parola o di quella frase.

Dai postulati e dalle definizioni si deducono per via di ragionamenti quelle verità che diconsi *teoremi* ⁽²⁾.

⁽¹⁾ I postulati in alcuni casi, come quello cui si allude sopra, tengono luogo delle definizioni, ma ne differiscono in questo che la definizione presuppone l'esistenza di ciò che si definisce, mentre col postulato *si chiede* di ammettere la esistenza di una cosa intanto che si definisce: in altri casi invece si chiede la concessione di una certa proprietà (vedi ad es. il n. 83) in accordo col fatto (fin dove è possibile verificarlo).

⁽²⁾ Ordinariamente oltre ai postulati ed ai teoremi si distinguono gli *assiomi*, dicendoli verità evidenti logicamente, tali cioè che riesce impossibile il negarli. Ma siccome potrebbe essere questione di maggiore o minore evidenza, preferiamo omettere questa distinzione: perchè anche queste verità sono conseguenze di postulati o di definizioni, in quanto che l'evidenza logica consiste in questo, che il processo logico di deduzione è così breve, da non averne si può

Ad es. l'enunciato al n. 13: *Due figure eguali ad una terza sono eguali tra loro*, è un teorema.

Talvolta la verità d'un teorema è così immediata da essere inutile uno schiarimento; ma ordinariamente per renderla evidente occorre una serie di ragionamenti, che dicesi la *dimostrazione* del teorema.

Si dice *corollario* un teorema, conseguenza immediata di uno o più teoremi o postulati o definizioni.

Infine si dice talora *proposizione* un postulato, un teorema, una definizione ed in generale qualunque enunciato vero o falso che sia.

17. In una proposizione conviene distinguere:

1.° l'ente o gli enti di cui si tratta (*il soggetto*).

2.° le proprietà attribuite all'ente (*l'ipotesi*).

3.° le proprietà dedotte (*conseguenza o tesi*).

Es. Nella proposizione:

Due figure eguali ad una terza sono eguali tra loro (1), il soggetto è: *due figure*; l'ipotesi: *eguali ad una terza*; la tesi: *sono eguali tra loro*.

Scambiando in una proposizione l'ipotesi colla tesi si ha una nuova proposizione (vera o falsa) che dicesi la *reciproca* o l'*inversa* della prima.

Es. La reciproca della proposizione (1) è:

Due figure eguali tra loro sono eguali ad una terza (2).

dire quasi coscienza. Da non confondersi coll'evidenza intuitiva dovuta più all'esperienza che ad altro. Ad es. l'assioma: *una parte è minore del tutto*, si deduce dalle definizioni di somma e di differenza di due grandezze: così quest'altro: *due grandezze eguali ad una terza sono eguali tra loro*, risulta dalla definizione di eguaglianza, e via dicendo.

Si noti che come la (2) è reciproca della (1), così la (1) è reciproca della (2).

Se in una proposizione si mutano l'ipotesi e la tesi nelle loro contrarie (cioè si negano l'una e l'altra), si ha una proposizione (vera o falsa), che dicesi *contraria* della prima.

Es. La contraria della (1) è:

Due figure non eguali ad una terza non sono eguali tra loro.

Si noti che, come la (3) è contraria della (1), così la (1) è contraria della (3).

Finalmente si può ottenere una quarta proposizione formando la reciproca della contraria della prima o la contraria della reciproca, che coincidono. Questa proposizione si deduce direttamente dalla prima, cambiando l'ipotesi nella contraria della tesi e la tesi nella contraria dell'ipotesi.

Es. La reciproca della contraria (o contraria della reciproca) della (1) è:

Due figure non eguali tra loro non sono eguali ad una terza (4).

Notisi che, come la (4) è reciproca della contraria della (1), così la (1) lo è della (4). Così pure la (2) e la (3) sono l'una reciproca della contraria dell'altra.

Queste quattro proposizioni possono essere o tutte vere, o tutte false, od anche due vere e due false, come nel nostro caso.

18. Fra queste proposizioni a due a due vi è una relazione, detta comunemente *la legge delle reciproche*, e che si enuncia così:

Se è vera una proposizione, è vera anche la reciproca della contraria.

Così nel nostro esempio essendo vera la (1), è vera anche la (4). Ed infatti se si negasse la (4), converrebbe ammettere che due figure non eguali tra loro fossero eguali ad una terza, il che è in contraddizione colla (1).

E se è falsa una, è falsa anche l'altra.

Così essendo falsa la (2), è falsa anche la (3).

Se ne deduce allora che:

Se è vera una proposizione e la sua reciproca, sono vere le due contrarie: oppure se è vera una proposizione e la sua contraria, sono vere le due reciproche.

19. Se in una proposizione si muta la tesi (sola) nella sua contraria, si ha una proposizione che dicesi *contraddittoria* della prima.

Ad es. le due proposizioni:

Due figure non eguali fra loro non sono eguali ad una terza;

Due figure non eguali fra loro sono eguali ad una terza,

sono contraddittorie.

Di due proposizioni contraddittorie una è necessariamente vera e l'altra falsa ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Il sig. DUHAMEL (*op. citata*, première partie, pag. 25) avverte di non confondere le proposizioni contraddittorie colle proposizioni *incompatibili*, tali cioè che non possono essere vere ad un tempo; perchè di due proposizioni incompatibili una *può* essere vera, ma possono essere entrambe false. Così ad es. le due proposizioni: *Il corpo A è bianco, il corpo A è nero* sono incompatibili ed una di esse può esser vera; ma sono entrambe false, se il corpo A è per es., di color rosso. Invece le due proposizioni: *Il corpo A è bianco, il corpo A non è bianco*, sono contraddittorie ed una delle due *deve* essere vera e l'altra falsa.

20. La dimostrazione di un teorema è *diretta*, se da una verità nota si deduce la verità da provarsi: *indiretta* o *per assurdo*, se si dimostra falsa la contraddittoria. Così la dimostrazione data al n. 18 è per assurdo. Il primo modo è preferibile perchè più naturale e chiaro, mostrando il legame che esiste tra la verità nota e quella da provarsi ⁽¹⁾; il secondo è comodo per lo più a dimostrare il reciproco di un teorema già noto ⁽²⁾.

21. Studiando le figure noi vedremo che, quando possono ridursi a coincidere certi elementi di una figura con altrettanti di un'altra, anche gli altri elementi delle due figure e perciò le figure stesse coincidono e sono eguali. Si dice allora che una figura è *determinata in modo unico* da quegli elementi.

Per enunciare una figura si leggono certi suoi punti: i punti si nominano colle lettere dell'alfabeto ed ordinariamente colle maiuscole.

§ 2.° La retta.

22. Tra le linee consideriamo in primo luogo *la retta*.

L'idea di questa linea si acquista osservando un filo ben teso, un raggio luminoso che si propaga in una camera oscura, ecc. Queste cose però

⁽¹⁾ Lo Chasles dice che le dimostrazioni dirette *sont les seules qui mettent une vérité dans toute son évidence, et qui éclairent et satisfassent pleinement l'esprit*. (Aperçu hist., pag. 9).

⁽²⁾ Questo metodo fu adoperato per la prima volta da Euclide nei suoi *Elementi*.

danno piuttosto l'idea di una parte di retta, che noi dobbiamo pensare prolungata indefinitamente.

23. Quanto si ammette intorno alla linea retta è contenuto nel seguente

POSTULATO. *La retta è una linea indefinita, determinata in modo unico da due punti (n. 21); ogni suo punto la decompone in due parti, ciascuna delle quali rotando intorno al punto di divisione, può ridursi a passare per un punto qualunque dello spazio.*

COROLLARIO 1.° *Per due punti dati si può far passare una data retta, ma una sola.*

Si faccia rotare la retta prima intorno ad un suo punto fino a passare per uno dei punti dati, poi intorno a questo fino a passare per l'altro. Se allo stesso modo si fa passare un'altra retta per i due punti, questa coincide colla prima, perchè due punti determinano in modo unico una retta.

Per enunciare una retta è sufficiente leggerne due punti: così la retta, che passa per due punti A e B, si dice la retta AB.

COROLLARIO 2.° *Tutte le rette sono eguali.*

COROLLARIO 3.° *Una retta è divisa da ogni suo punto in due parti eguali:* il che equivale a dire che una retta rotando intorno ad un suo punto può riprendere la primitiva posizione, essendosi scambiate quelle delle due parti.

COROLLARIO 4.° *Per un punto passano infinite rette.*

24. Due rette che hanno un solo punto comune si dice che si *intersecano*, o *concorrono*, o *s' incontrano* in quel punto.

25. Le due parti in cui una retta è divisa da un suo punto A si dicono *raggi uscenti* da quel punto.

Un raggio rappresenta quel che comunemente dicesi *la direzione* da un punto (il punto A da cui esce) ad un altro qualunque del raggio stesso: di guisa che un punto, che partendo da A si muove sopra un raggio uscente da A senza mai ritornare sulle posizioni già occupate, si dice che si muove nella stessa direzione.

I due raggi in cui una retta è divisa da un suo punto si dicono *opposti*, e rappresentano ciò che comunemente dicesi due direzioni opposte.

Per enunciare un raggio si legge prima il punto da cui esce, poi un altro punto del raggio stesso.

26. POSTULATO. Una retta può muoversi conservando la sua posizione nello spazio; allora si dice che *scorre su sè stessa*, e questo può avvenire in due opposte direzioni: in tale movimento i punti della retta percorrono la retta stessa.

27. Una retta che ha due punti fissi è immobile (n. 23 1.^a parte del Postulato).

28. Quando una figura si muove tenendo fermi due punti, si dice che *ruota* intorno alla retta di quei due punti, che è pure immobile, e che prende il nome di *asse di rotazione*.

§ 3.^o Il piano.

29. Tra le superficie consideriamo in primo luogo *il piano*.

L'idea del piano si acquista osservando la superficie libera delle acque tranquille, una lastra di vetro, una parete ben liscia ecc. L'idea che così ci formiamo è piuttosto di una parte finita di piano,

rispetto all'altra ⁽¹⁾. Ciò posto, se M è un punto del piano P, dico che esso appartiene anche al piano Q. Infatti, poichè la AB è divisa in A dalla AC, una parte della AB si troverà rispetto alla AC dalla banda opposta a quella ove trovasi il punto M. Preso su questa un punto D, s'immagini la retta DM, la quale necessariamente incontrerà la AC in un punto E. Ma i punti D ed E sono comuni ai due piani, dunque la retta DE ed il suo punto M sono comuni ai due piani. Similmente dicasi di un punto del piano Q.

COROLLARIO 1.^o *Un piano, è determinato in modo unico da una retta e da un punto esterno ad essa od anche da due rette concorrenti.*

Per enunciare un piano è sufficiente leggerne tre punti non in linea retta. Così (fig. 1) si dice il piano ABC.

COROLLARIO 2.^o *Tutti i piani sono eguali.*

COROLLARIO 3.^o *Un piano è diviso da una sua*

⁽¹⁾ Una superficie, presa comunque in un solido o nello spazio, ha (in generale) due *bande* nel solido e nello spazio, che si dicono *opposte*; così una linea di una superficie (che non la limita) ha due bande opposte sulla superficie; infine un punto di una linea (che non la limita) ha due bande opposte sulla linea.

Due linee di una superficie che hanno un punto comune si dice che *s'intersecano* o *s'incontrano* in quel punto, quando un punto mobile sopra una delle linee, oltrepassando quel punto, passa da una banda all'altra della seconda linea; analogamente dicasi di due superficie che *s'incontrano* secondo una linea.

Due rette nel piano poi, che hanno un punto comune, non solo s'incontrano in quel punto, ma ciascuna è divisa da esso in due parti situate da bande opposte rispetto all'altra.

retta in due parti eguali; il che equivale a dire che un piano rotando intorno ad una sua retta può riprendere la posizione primitiva, essendosi scambiate quelle delle due parti.

Chiameremo *falde* le due parti in cui un piano è diviso da una sua retta.

32. POSTULATO. Un piano, conservando la sua posizione, può muoversi in modo che una sua retta scorra su sè stessa: si dice allora che il piano *scorre su sè stesso strisciando lungo un asse* (la retta scorrente). Questo movimento può avvenire in due sensi opposti.

33. POSTULATO. Un piano, conservando la sua posizione, può muoversi tenendo fermo uno de' suoi punti: si dice allora che il piano *scorre su sè stesso rotando intorno al punto fisso*. Anche questo movimento può avvenire in due sensi opposti.

34. POSTULATO. In un piano dati due punti qualunque A, B *si ammette*, di poter *costruire* la retta AB e ciò mediante la *riga* (strumento ideale di cui la riga usata nel disegno è una rappresentazione materiale).

35. Si usa ⁽¹⁾ dividere la Geometria in due parti, che sono:

(1) Abbiamo detto *si usa* dividere la Geometria in Planimetria e Stereometria, perchè tale divisione non è necessaria e non mancano trattati di Geometria dove si studiano insieme figure piane e solide. Uno dei migliori tra questi è l'aureo libro « *Elementi di Geometria* — Torino, E. Loescher 1884 » del chiarissimo prof. R. De Paolis, di cui si deplora tuttora la perdita immatura: di quel libro (e di altri molti pregevolissimi che non è il caso di nominare qui singolarmente) ci siamo serviti largamente nel compilare questi elementi.

1.° La *Geometria piana* o *Planimetria*, che studia le figure *piane*, cioè le figure i cui elementi sono in un piano.

2.° La *Geometria solida* o *Stereometria*, che studia le figure *solide*, cioè le figure i cui elementi sono situati comunque nello spazio.

Questa distinzione però non esclude che nello studio delle figure piane si possa approfittare dello spazio; cioè si possa trasportare una figura piana fuori del suo piano.

Per facilitare lo studio delle figure si usa di rappresentarle con disegni. Ma non bisogna dimenticare che, per quanta cura si abbia nel fare i disegni, essi non sono le figure, ma una loro rappresentazione materiale, perchè le figure sono affatto ideali, cioè sono creazioni della nostra mente.

Ed a proposito del disegno delle figure è opportuna una dichiarazione. Se talvolta ci permettiamo qualche locuzione scorretta, come ad esempio quando si dice che *si prolunga* una retta (la quale per sè è indefinita), si deve intendere che ci riferiamo al disegno della figura, anzichè alla figura ideale; perchè nel disegno la retta non può naturalmente essere rappresentata che da una parte finita, la quale in certi casi occorre di prolungare.

PARTE PRIMA

PLANIMETRIA

CAPITOLO I

RETTE ED ANGOLI - PRIME NOZIONI SUL CERCHIO

§ 1.º I segmenti.

36. Dicesi *segmento* una parte di retta limitata da due punti. Un segmento si enuncia leggendone i punti estremi. Così i due punti A, B (fig. 2) assegnano sopra la retta AB il segmento AB (oppure BA). Le altre due parti della retta (che sono due raggi opposti (n. 25)) si dicono i *prolungamenti* del segmento AB.

37. Un segmento AB si può supporre generato da un estremo A (o B) che si muove sulla retta verso l'altro estremo B (o A) fino a coincidere con esso. Talvolta conviene tener conto del senso secondo il quale si suppone generato il segmento; ed allora si deve leggere prima l'estremo mobile, o punto di partenza, e poi l'altro. Così dicendo segmento AB, s'intenderà il segmento generato dal punto A che si muove sulla retta fino a coincidere

con B. D'ordinario però è indifferente la lettura nei due modi.

38. Due segmenti si dicono *consecutivi*, se hanno un estremo comune senza essere sulla stessa retta, A'B', B'C' (fig. 2): *adiacenti*, se situati sulla stessa retta con un estremo comune e da bande opposte del medesimo, come AB, BC (fig. 2).

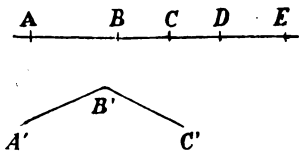


Fig. 2.

Il segmento AC dicesi la loro *somma* e si scrive:

$$AC = AB + BC.$$

39. *Fare l'addizione* di due segmenti, vuol dire trovare la loro somma: se di più segmenti, vuol dire trovare la somma dei primi due, poi della somma trovata e del terzo e così di seguito fino all'ultimo. Così AE è la somma dei segmenti AB, BC, CD, DE (fig. 2) e si scrive:

$$AE = AB + BC + CD + DE.$$

40. La somma di due, tre... segmenti eguali ad AB si dice il *doppio*, il *triplo*... di AB (o *multiplo* di AB secondo i numeri 2, 3...) e si rappresenta con 2AB, 3AB...

Inversamente se il segmento AB è la somma di due, tre... segmenti eguali tra loro, ciascuno di questi dicesi la *metà*, la *terza parte*... di AB (*sum-multiplo* o *parte aliquota* di AB secondo i numeri 2, 3...) e si rappresenta con $\frac{1}{2}$ AB, $\frac{1}{3}$ AB...

41. *Fare la sottrazione* di due segmenti, vuol dire trasportarli sulla stessa retta e sovrapporli in modo da avere un estremo comune, come i segmenti AB, AC (fig. 2) che hanno l'estremo A comune. Se,

come in questo caso, gli altri due estremi B e C non coincidono, i due segmenti sono diseguali; il segmento AB contenuto nel segmento AC si dice *minore* di AC, ed AC *maggiore* di AB, e si scrive:

$$AB < AC \quad \text{o} \quad AC > AB$$

il segmento BC dicesi la *differenza* tra AC ed AB, e si scrive:

$$AC - AB = BC.$$

È chiaro poi che

$$AB = AC - BC \quad \text{e} \quad AC = AB + BC$$

Ma se anche gli altri due estremi coincidono, i due segmenti coincidono e sono uguali.

In questo caso si dice che la differenza è *nulla*, intendendo per segmento *nullo*, quello i cui estremi coincidono.

42. POSTULATO. Si ammette che la coincidenza di due segmenti possa aversi anche capovolgendo uno di essi.

In altre parole, se sovrapponendo due segmenti AB, CD (fig. 3) in modo che C cada in

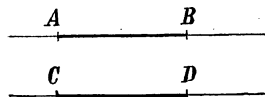


Fig. 3.

A, anche D cade in B, ponendo D sopra A si potrà far in modo che C cada in B.

§ 2.° Le spezzate - Linee equivalenti.

43. Una linea formata da più segmenti consecutivi, ma non adiacenti, dicesi *spezzata* o *poligonale*. I segmenti sono i *lati* della spezzata. La spezzata si enuncia leggendo successivamente gli estremi dei lati: così si dice la spezzata ABCD (fig. 4). I punti A, D sono gli *estremi* della spezzata.

Una spezzata è *piana* se tutti i suoi lati sono in uno stesso piano; *gobba*, se ciò non si verifica. Si tratterà sempre di spezzate piane a meno che non sia detto esplicitamente il contrario.

Una spezzata (piana) è *convessa*, se è tutta da una banda di ciascun lato prolungato; altrimenti è *concava*; e finalmente è *intrecciata* se due lati non consecutivi si intersecano. Così (fig. 4) la spezzata ABCD è convessa, la EFGH è concava, la MNPQ è intrecciata.

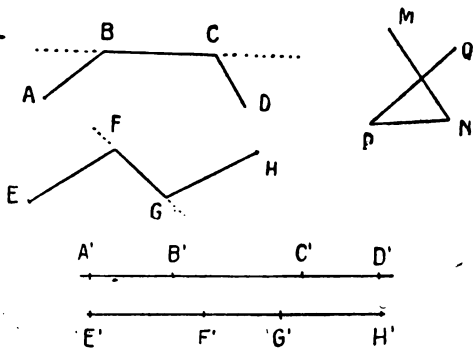


Fig. 4.

44. Una linea finita, come un segmento, una spezzata, ha una estensione determinata.

45. L'intuizione ci avverte come vi possano essere linee che, pur non essendo eguali nella forma, cioè considerate come figure, abbiano però eguale estensione. Questo concetto intuitivo non può essere a questo punto tradotto in forma razionale, se non dicendo che sono linee composte o scomponibili nello stesso numero di parti uguali e le diremo *equivalenti*. Così ad es. (fig. 4) se sopra una retta si immaginano successivamente i segmenti $A'B' = AB$, $B'C' = BC$, $C'D' = CD$, il segmento $A'D'$ e la spezzata ABCD sono equivalenti.

46. *Addizionare* due spezzate (od un segmento ed una spezzata) vuol dire ridurle *consecutive*, cioè

con un estremo comune. La spezzata risultante è la *somma* delle due spezzate.

La definizione si estende facilmente al caso di più spezzate.

Due spezzate possono ridursi consecutive in quanti modi si vuole; le somme ottenute sono di *forma* diversa; però sono equivalenti, perchè composte di parti rispettivamente eguali. Perciò è indifferente considerare l'una piuttosto che l'altra.

47. Con due spezzate non si può in generale fare la *sottrazione*, come si è fatto coi segmenti, perchè non si possono sovrapporre, cioè non si può trovare la *differenza*. Perciò volendo eseguire questa operazione, conviene trasformarle in segmenti equivalenti alla somma dei lati di ciascuna delle due, ed operare con questi; poichè qualora si consideri la sola estensione, ad una linea si può sostituire una sua equivalente.

48. La trasformazione delle spezzate in segmenti permette di asserire che:

TEOREMA. *Date due spezzate, è possibile decomporle in parti in modo da verificarsi uno dei due casi:*

o le spezzate risultano decomposte nello stesso numero di parti eguali ciascuna a ciascuna;

oppure una è formata di parti eguali rispettivamente a quelle dell'altra; più altre parti.

Infatti le due spezzate ABCD, EFGH (fig. 4) si trasformino nei due segmenti A'D', E'H' addizionandone rispettivamente le parti. I due segmenti A'D' ed E'H' sovrapposti o coincidono oppure no. Se coincidono, i punti di divisione dell'uno suddivideranno le parti dell'altro e reciprocamente. E

allora, se nelle parti delle due spezzate si fanno le stesse suddivisioni che si osservano nelle parti corrispondenti dei due segmenti equivalenti, le due spezzate risultano decomposte nello stesso numero di parti eguali.

Se non coincidono, uno dei due, p. es. $E'H'$, sarà maggiore dell'altro. Allora i punti di divisione di $A'D'$ (compreso il punto D') suddivideranno le parti di $E'H'$ ed i punti di divisione di questo (od alcuni di essi) suddivideranno le parti di $A'C'$. Dopo ciò, se nelle parti delle due spezzate si fanno le stesse suddivisioni avvenute nelle corrispondenti parti dei due segmenti $A'D'$ ed $E'H'$, risulta appunto che la spezzata $EFGH$ conterrà le parti eguali rispettivamente a *tutte* quelle della spezzata $ABCD$ più altre parti.

Nel primo caso le due spezzate sono equivalenti; nel secondo la spezzata $EFGH$ è *maggiore* dell'altra e la *differenza* è rappresentata dalla somma di quelle parti che non hanno le corrispondenti nella $ABCD$.

Si può adunque concludere, quanto alla estensione, che due spezzate o sono equivalenti, oppure l'una è maggiore dell'altra.

§ 3.º Gli angoli.

49. Due raggi o direzioni OA , OB (fig. 5), che partono da uno stesso punto O , dividono il piano in due parti, ciascuna delle quali dicesi *angolo*. Il punto O è il *vertice* ed i raggi OA , OB sono i *lati* sia dell'uno che dell'altro angolo. I raggi opposti

OA' , OB' sono i *prolungamenti* dei lati; questi prolungamenti cadono in generale in uno dei due angoli in cui è diviso il piano: questo dicesi *concavo* e l'altro *convesso*.

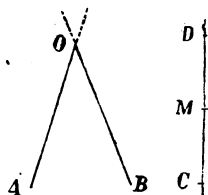


Fig. 5.

Può avvenire però che i due lati siano i prolungamenti l'uno dell'altro, come ad es. i lati MC , MD (fig. 5), che formano una linea retta: allora i due angoli in cui è diviso il piano si dicono *piatti*.

TEOREMA. *Gli angoli piatti sono eguali* (n. 31, Cor. 3.^o).

50. Un angolo si enuncia leggendo successivamente un punto sopra un lato, il vertice ed un punto sull'altro lato, ed aggiungendo l'aggettivo *convesso* o *concavo*: siccome però quasi sempre si considerano angoli convessi, questo aggettivo si sottintende. Così i due raggi OA , OB dividono il piano nell'angolo AOB (o BOA) (convesso) e nell'angolo concavo AOB (o BOA). Talvolta, quando non possa nascer dubbio, si legge il solo vertice, dicendosi *l'angolo in O* (convesso o concavo).

L'angolo AOB si scrive $\widehat{AOB}$ se convesso, $\frown{AOB}$ se concavo, $\overline{AOB}$ se piatto.

51. Un angolo si può supporre generato dalla rotazione di un lato intorno al vertice fino a coincidere coll'altro lato (n. 11, 2.^o e 14). La rotazione può avvenire in due sensi opposti. Quando si voglia tener conto del senso della rotazione, si deve leggere prima il lato mobile e poi l'altro.

Così nella fig. 5 il lato OA rotando in un senso fino a coincidere con OB genera l'angolo convesso

$\widehat{AOB}$ e rotando nel senso opposto l'angolo concavo $\widehat{AOB}$. Di solito però è indifferente leggere $\widehat{AOB}$ o $\widehat{BOA}$.

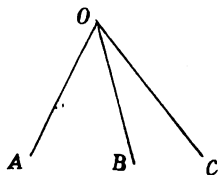


Fig. 6.

52. Due angoli si dicono *adiacenti*, se disposti col vertice ed un lato in comune e da bande opposte di questo; come ad es. gli angoli $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ (fig. 6). L'angolo $\widehat{AOC}$ si dice la *somma* dei due angoli $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$ e si

scrive:

$$\widehat{AOC} = \widehat{AOB} + \widehat{BOC}.$$

53. *Fare l'addizione di due angoli*, vuol dire trovare la loro somma; se di più angoli, vuol dire trovare la somma dei primi due, poi della somma

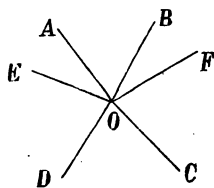


Fig. 7.

trovata e del terzo e così di seguito fino all'ultimo.

Se, fatta l'addizione di più angoli, i lati della somma coincidono, come ad es. per la somma: $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COD} + \widehat{DOE} + \widehat{EOA}$ (fig. 7), questa è uguale all'intero

piano e dicesi *un giro*, che è eguale alla somma di due angoli piatti.

Può avvenire che l'intero piano non basti a costruire la somma di più angoli: così, per es., se gli angoli da addizionare fossero: $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOE}$, $\widehat{EOF}$ (fig. 7), disponendoli adiacenti successivamente, come nella figura, si vede che la somma sopravanza il piano: allora l'angolo $\widehat{EOF}$ (nel quale trovasi il primo lato OA della somma) si considera decomposto nelle due parti $\widehat{EOA}$ ed $\widehat{AOF}$; colla prima unita ai precedenti si completa il piano

e si conta un *giro*; rimane poi l'angolo $\widehat{AOF}$; perciò la somma risulta formata di un giro e dell'angolo $\widehat{AOF}$ (che contiene gli angoli, se ve ne fossero, che non fanno parte del giro).

La somma può contenere anche più giri.

Le definizioni di multiplo e summultiplo date per i segmenti (n. 39) vanno estese anche agli angoli.

54. *Fare la sottrazione* di due angoli, vuol dire sovrapporli l'uno all'altro in modo che abbiano in comune il vertice ed un lato, come gli angoli $\widehat{AOC}$, $\widehat{AOB}$ (fig. 6), che hanno il vertice ed il lato OA comune. Se, come in questo caso, gli altri due lati OB, OC non coincidono, i due angoli sono diseguali: l'angolo $\widehat{AOB}$ contenuto nell'angolo $\widehat{AOC}$ si dice *minore* di $\widehat{AOC}$, ed $\widehat{AOC}$ *maggiore* di $\widehat{AOB}$, e si scrive:

$$\widehat{AOB} < \widehat{AOC} \quad \text{oppure} \quad \widehat{AOC} > \widehat{AOB}$$

l'angolo $\widehat{BOC}$ dicesi la *differenza* tra $\widehat{AOC}$ e $\widehat{AOB}$, e si scrive:

$$\widehat{AOC} - \widehat{AOB} = \widehat{BOC}.$$

È chiaro poi che:

$$\widehat{AOB} = \widehat{AOC} - \widehat{BOC}$$

e che
$$\widehat{AOC} = \widehat{AOB} + \widehat{BOC}.$$

Ma se anche gli altri due lati coincidono, allora i due angoli coincidono e sono eguali.

In questo caso si dice che la differenza è *nulla*, intendendo per angolo *nulla*, quello i cui lati coincidono (ed i prolungamenti sono esterni all'angolo).

55. **POSTULATO.** Si ammette che la coincidenza di due angoli possa aversi anche rovesciando uno

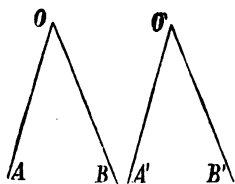


Fig. 8.

di essi. In altre parole, se sovrappponendo due angoli $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'O'B'}$ (fig. 8) in modo che $O'A'$ coincida con OA , anche $O'B'$ coincide con OB ; ponendo invece $O'B'$ sopra OA si potrà far in modo che $O'A'$ cada su OB .

§ 4.° Circonferenza e cerchio.

56. Se si immagina che un segmento OA (fig. 9) ruoti nel piano intorno all'estremo O e in un dato verso, si ammette che esso possa ritornare nella posizione iniziale ⁽¹⁾. Con tale movimento

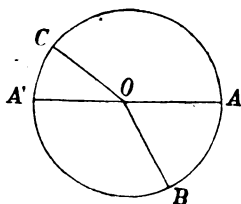


Fig. 9.

l'estremo mobile A descrive una linea (n. 14 Post.) chiusa, che dicesi *circonferenza*. Il punto O dicesi il *centro*, ed ogni segmento, che unisce il centro con un punto della circonferenza, *raggio*. E chiaro che tutti i raggi sono eguali, perchè sono

le posizioni diverse del segmento mobile OA .

57. La circonferenza, essendo una linea chiusa, divide il piano in due parti, una finita che dicesi *cerchio* o *circolo* (che contiene il centro) e l'altra indefinita. I punti del cerchio si dicono *interni* al circolo ed alla circonferenza, gli altri *esterni*. I segmenti che uniscono i punti interni col centro sono minori del raggio, e quelli che uniscono i punti esterni col centro sono maggiori del raggio.

⁽¹⁾ Non mancano fatti sperimentali, che giustificano questo postulato.

Reciprocamente si può dire che un punto è interno od esterno ad un cerchio secondo che il segmento che lo unisce col centro è minore o maggiore del raggio.

Una figura è *interna* o *esterna* ad una circonferenza, quando lo sono i suoi punti.

58. Una circonferenza od un cerchio si enunciano leggendo il centro ed un raggio: quando non nasca dubbio si può leggere il solo centro; così si dice la circonferenza od il cerchio *O*.

Dicesi *diametro* ogni segmento che passa pel centro e termina alla circonferenza, come *AA'*. Tutti i diametri sono divisi per metà dal centro e sono eguali.

59. TEOREMA. *Due circonferenze (due cerchi) di raggi eguali sono eguali.*

Si verifica per sovrapposizione. La coincidenza per sovrapposizione si può ottenere in quante si vogliano posizioni diverse, poichè un raggio dell'una circonferenza si può far coincidere successivamente coi raggi dell'altra.

E si può anche ottenere dopo aver rovesciato una delle circonferenze sul piano.

Si deduce che se una circonferenza (un cerchio) si fa rotare intorno al centro, essa non cambia posizione nel piano. Si dice allora che la circonferenza (il cerchio) *scorre su sè stessa*.

Una circonferenza (un cerchio) può scorrere su sè stessa in due sensi opposti.

60. POSTULATO. Dato un punto, come centro, ed un segmento qualunque, come raggio, *si ammette* di poter costruire la circonferenza, e ciò mediante il *compasso* (strumento ideale, di cui il compasso del disegno è una rappresentazione materiale).

61. Una retta, che passa per un punto interno ad una circonferenza, ha due punti comuni con essa. Ed infatti la retta rotando intorno al punto interno può ridursi a passare per qualunque punto del piano (23 Post. 2.^a parte); ciò significa che la retta ha certamente punti esterni alla circonferenza, sia da una banda che dall'altra del punto interno. Epperò dovrà incontrare la circonferenza *almeno* in due punti situati da bande opposte del punto interno. Dimosteremo più innanzi che i punti comuni a queste due linee non possono essere più di due.

62. Una circonferenza, che ha un punto interno ed uno esterno rispetto ad un'altra, deve necessariamente incontrarla *almeno* in due punti, perchè un punto mobile sulla prima circonferenza può passare dalla posizione del punto interno alla seconda a quella dell'esterno movendosi in due sensi opposti. Dimosteremo più innanzi che due circonferenze non possono avere più di due punti comuni.

63. Due punti A, B. (fig. 9) presi sopra una circonferenza la dividono in due parti, che si dicono *archi*; i punti A e B ne sono gli *estremi*. I due raggi OA, OB dividono il cerchio in due parti, dette *settori*; i medesimi raggi prolungati dividono il piano in due angoli, che si dicono *angoli al centro*. Ciascun angolo al centro comprende un settore ed un arco. Questo si dice anche *opposto* all'angolo al centro che lo comprende.

64. L'arco si enuncia leggendone gli estremi; siccome però vi sono due archi cogli stessi estremi, così a togliere l'ambiguità dicendo arco AB s'intende quello opposto all'angolo al centro convesso:

per l'altro si può leggere un terzo punto fra i due estremi, dicendo per esempio l'arco ACB.

L'arco AB si rappresenta con $\widehat{AB}$.

65. Dei due settori, in cui il cerchio è diviso dai raggi OA, OB, si dice *convesso* quello compreso dall'angolo al centro convesso, *concavo* l'altro.

Un settore si enuncia come l'angolo al centro che lo comprende, leggendo però gli estremi dei raggi invece di due punti qualunque sui lati: così si dice: il settore AOB (convesso) ed il settore concavo AOB.

66. Tenendo presente quanto si è detto intorno ai segmenti ed agli angoli e procedendo cogli stessi criteri, si possono dare analoghe definizioni per gli archi ed i settori di un dato cerchio (o di cerchi eguali). Così si possono definire gli archi, ed i settori *adiacenti*, la *somma* di due o più archi o settori, la *differenza* di due archi o settori, l'arco ed il settore *nulla*, ecc.... il che lasciamo per esercizio allo studioso.

OSSERVAZIONE. Se si immagina che il raggio OA (fig. 9) indefinito ruoti intorno ad O fino a coincidere con OB, è chiaro che questo genera l'angolo al centro AOB, il raggio finito OA il settore AOB, ed il punto A l'arco AB (n. 14). Ciò stabilisce una certa relazione o *corrispondenza* fra gli angoli al centro, gli archi ed i settori; corrispondenza di *posizione* e di *estensione*.

Fermandoci per ora alla corrispondenza di posizione, si vede che ad angoli adiacenti corrispondono archi e settori adiacenti, ed all'angolo somma o differenza di altri due corrisponde l'arco od il

settore somma o differenza dei due corrispondenti. Torneremo più innanzi su tale corrispondenza.

§ 5.º Generalità sulle grandezze.

67. Si dicono *grandezze* tutti quegli enti dei quali si possono stabilire i concetti di eguaglianza (equivalenza), di somma e di differenza (diseguaglianza).

Così i segmenti, le spezzate, gli angoli, gli archi di una stessa circonferenza, i settori di uno stesso cerchio sono grandezze; e studiati sotto questo aspetto si viene a considerare la loro *estensione*.

68. Già fin da questo punto si sono presentate due specie di grandezze.

Appartengono alla prima specie quelle, per le quali l'eguaglianza di estensione (equivalenza) si verifica insieme all'eguaglianza come figure; come i segmenti, gli angoli.

Appartengono alla seconda quelle, per le quali l'equivalenza non porta di conseguenza l'eguaglianza come figure: quali ad es. le spezzate, le quali possono essere equivalenti, pur essendo diverse come figure.

Per le prime il concetto di differenza si ottiene colla semplice sovrapposizione: mentre per le seconde la cosa non è possibile (in generale), se non *trasformandole* in grandezze della prima specie: come si è fatto ad esempio nel caso delle spezzate, sostituendo a queste i segmenti ottenuti addizionando i lati di ciascuna.

Si troveranno in seguito altre grandezze sì dell'una che dell'altra specie. Si troverà ancora una

terza specie di grandezze, delle quali a questo punto è prematuro il trattare.

I teoremi che seguono valgono per le grandezze finora considerate.

69. TEOREMA. *La somma di più grandezze gode della proprietà commutativa, cioè le somme ottenute coll' addizionare in diverso ordine più grandezze sono eguali.*

Indicheremo le grandezze colle lettere $A, B, C...$

Cominciando dal caso di due grandezze si ha:

$$A + B = B + A.$$

Lo si verifica sovrapponendo l'una somma all'altra rovesciata e tenendo presente il postulato n. 42 dei segmenti e gli analoghi per le altre grandezze.

Pel caso di più grandezze dimostriamo prima che si possono scambiare due consecutive, cioè che:

$$A + B + C + D = A + C + B + D.$$

Infatti alle due grandezze B e C consecutive si può sostituire la loro somma parziale $(B + C)$, il che è evidente, e la somma diventa: $A + (B + C) + D$: alla somma $(B + C)$, la stessa capovolta $(C + B)$ (post. n. 41 e analoghi) e la somma diventa: $A + (C + B) + D$; finalmente alla somma $(C + B)$ le sue parti C e B , il che è pure evidente, e si ha infine: $A + C + B + D$,

Due grandezze non consecutive poi si scambiano per mezzo di scambi fra grandezze consecutive: così nella prima somma $A + B + C + D$ volendo scambiare B e D si proceda nel modo seguente:

$$\begin{aligned} A + B + C + D &= A + C + B + D \\ &= A + C + D + B = A + D + C + B. \end{aligned}$$

COROLLARIO. *Le grandezze della prima specie che sono equivalenti sono anche eguali.*

70. 1.° TEOREMA. *La somma di più grandezze non si altera, se ad alcune di esse si sostituisce la loro somma parziale; cioè la somma di più grandezze gode della proprietà associativa.*

Infatti se le grandezze alle quali si vuol sostituire la somma parziale sono consecutive, la cosa è evidente. [E ne abbiamo approfittato nel teorema precedente]. Se non sono consecutive, si possono rendere tali per la proprietà commutativa.

2.° Reciprocamente: TEOREMA. *La somma di più grandezze non si altera se ad una di esse se ne sostituiscono altre, delle quali questa è la somma parziale; cioè la somma di più grandezze gode della proprietà dissociativa.*

Così la somma $A + B + C$, ove $B = D + E$, equivale ad $A + (D + E) + C$, e questa ad $A + D + E + C$.

Circa poi alle grandezze nulle che indicheremo con O , faremo osservare che per ciascuna classe di grandezze si ha:

$$O = O, O + O = O, A + O = O + A = A \\ A - O = A.$$

71. Dopo ciò si possono ritenere evidenti le verità rappresentate simbolicamente dalle seguenti relazioni. Invitiamo lo studioso ad enunciarle ed a verificarle. Per brevità si indicano con $A, B, C...$ le grandezze e con m un numero intero qualunque:

$$1.° \text{ Se } A = B \text{ e } B = C, \quad \text{è } A = C.$$

2.° Se $A \gtrless B$ e $B = C$, è $A \gtrless C$ ⁽¹⁾,

3.° Se $A \gtrless B$ e $B \gtrless C$, è $A \gtrless C$.

4.° Se $A = B$ e $C = D$, è $A \pm C = B \pm D$.

COROLLARIO. Se $A = B$, è $mA = mB$, e
 $\frac{1}{m} A = \frac{1}{m} B$.

5.° Se $A \gtrless B$ e $C = D$, è $A \pm C \gtrless B \pm D$.

6.° Se $A = B$ e $C \gtrless D$, è $A - C \gtrless B - D$.

7.° Se $A \gtrless B$ e $C \gtrless D$, è $A + C \gtrless B + D$.

COROLLARIO. Se $A \gtrless B$, è $mA \gtrless mB$ e
 $\frac{1}{m} A \gtrless \frac{1}{m} B$.

8.° $mA \pm mB = m(A \pm B)$

ed anche

$$\frac{1}{m} A \pm \frac{1}{m} B = \frac{1}{m} (A \pm B).$$

72. Ammetteremo infine che:

Date due grandezze diseguali, esiste una multipla della minore che supera la maggiore ⁽²⁾.

(1) Nelle relazioni ove appaiono i doppi segni $\gtrless$ o $\pm$ si intende che vanno considerati separatamente prima tutti i superiori e poi gli inferiori. Così la 2.^a proposizione si compone delle due: 1.^a Se $A > B$ e $B = C$, è $A > C$; 2.^a Se $A < B$ e $B = C$, è $A < C$; così per le altre. Ove trattasi di sottrazione, s'intende quanto sia possibile nel modo indicato.

(2) Questa proposizione è nota col nome di *postulato o principio di Archimede*. Veramente, ammessa la proposizione per alcune grandezze, per altre diventa una conseguenza logica. Così se è vera per gli angoli, è di necessità vera per gli archi della stessa circonferenza. Ma non è qui opportuno di stabilire questa distinzione.

Cioè se $A < B$ esiste un numero intero m tale che sia $mA > B$.

§ 6.° Alcuni teoremi sugli angoli.

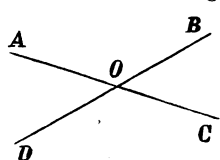
Rette perpendicolari.

73. Due angoli la cui somma è eguale ad un angolo piatto, si dicono *supplementari*.

TEOREMA. *Gli angoli supplementari di angoli eguali sono eguali.*

Infatti se da due angoli piatti che sono eguali si sottraggono due angoli eguali, i risultati sono eguali (n. 71, 1.°).

74. Due angoli si dicono *opposti al vertice*, se i lati dell'uno sono i prolungamenti dei lati dell'altro.



1.° **TEOREMA.** *Gli angoli opposti al vertice sono eguali.*

Gli angoli $\widehat{AOB}$, $\widehat{COD}$ (fig. 10) opposti al vertice sono eguali, perchè supplementari dell'angolo $\widehat{BOC}$.

2.° **Reciprocamente;**

TEOREMA. *Se da un punto O partono quattro raggi OA, OB, OC, OD (fig. 10) tali che $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ e $\widehat{BOC} = \widehat{DOA}$, i raggi OA ed OC sono opposti e così pure i raggi OB ed OD.*

Infatti se

$$\widehat{AOB} = \widehat{COD} \quad \text{e} \quad \widehat{BOC} = \widehat{DOA}$$

addizionando membro a membro si ha

$$\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = \widehat{COD} + \widehat{DOA}$$

e poichè la somma dei quattro angoli è eguale ad un giro, ciascuna delle somme $\widehat{AOB} + \widehat{BOC}$ e $\widehat{COD} + \widehat{DOA}$ è uguale a mezzo giro, ossia ad un

angolo piatto; dunque i raggi OA ed OC sono opposti. Similmente dicasi dei raggi OB ed OD.

75. Rette perpendicolari — TEOREMA. *Data una retta ed un punto, esiste una retta ed una sola che passa per quel punto e forma colla prima quattro angoli eguali.*

Possono darsi due casi: 1.° il punto è dato fuori della retta; 2.° il punto è dato sulla retta.

1.° CASO. Sia AB (fig. 11) la retta data e C il punto dato fuori di essa. Si faccia rotare il piano intorno alla AB di mezzo giro, in modo cioè che le due falde in cui è decomposto dalla AB si scambino di posizione (n. 31, Cor. 3.°): il punto C cadrà dall'altra banda della AB in un punto D; di poi si riporti il piano nella posizione iniziale e

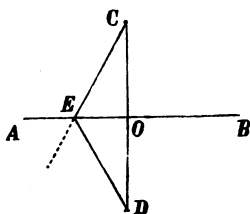


Fig. 11

si conduca la CD, la quale incontrerà necessariamente la AB in un punto O: dico che i quattro angoli in O così formati sono eguali. Infatti questi angoli a due a due sono eguali, come opposti al vertice; d'altra parte ripetendo la rotazione del piano intorno alla AB, gli angoli adiacenti $\widehat{BOC}$, $\widehat{BOD}$ e $\widehat{AOC}$, $\widehat{AOD}$ vengono a coincidere, e sono eguali: dunque i quattro angoli in O sono eguali.

Un'altra retta condotta per C, come la CE, non può formare colla AB quattro angoli eguali: ed infatti se così fosse, ripetendo la rotazione del piano attorno alla AB, gli angoli $\widehat{CEB}$, $\widehat{CEA}$ dovrebbero coincidere coi loro adiacenti e CE col suo prolungamento; ma la CE cade in ED, perchè C torna in D; dunque ED sarebbe il prolungamento di CE,

e pei due punti C, D passerebbero due rette CED, COD, il che è impossibile (n. 23 Postulato).

2.^o CASO. Sia ora AB la retta data e C un punto sopra di essa (fig. 12). Presa una retta qualunque MN ed un punto P fuori di essa, si ripeta la costruzione del primo caso: si otterrà così una retta PQ che forma colla MN nel punto d'incontro O quattro angoli eguali.

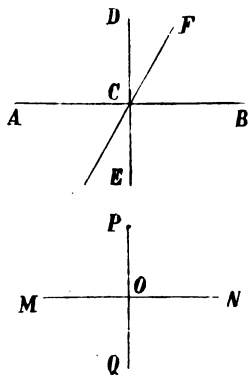


Fig. 12.

Si faccia scorrere la figura nel piano fino a che il punto O cada in C e la si faccia rotare intorno a C fino a far coincidere la MN colla AB: la PQ prenderà la posizione di una retta DE che passa per C e forma colla AB quattro angoli eguali.

Ogni altra retta che passa per C forma colla AB angoli adiacenti diseguali. Infatti sia, p. es., la CF che cade nell'angolo $\widehat{DCB}$. Dalla figura si ha:

$\widehat{ACF} > \widehat{ACD}$, $\widehat{ACD} = \widehat{DCB}$ e $\widehat{DCB} > \widehat{FCB}$.
dunque $\widehat{ACF} > \widehat{FCB}$ (n. 71 2^o, 3^o).

Se il raggio CF cadesse nell'angolo $\widehat{ACD}$ si concluderebbe $\widehat{ACF} < \widehat{FCB}$.

76. Due rette, che incontrandosi formano quattro angoli eguali, diconsi *perpendicolari* l'una all'altra; se formano angoli diseguali, *oblique*.

Il teorema precedente può dunque enunciarsi così:

TEOREMA. *Da un punto ad una retta si può condurre una perpendicolare ed una sola.*

77. Gli angoli formati da due rette perpendicolari diconsi *retti*. Un angolo retto si indica colla lettera $\widehat{R}$. Un angolo (convesso) maggiore di un retto dicesi *ottuso*, un angolo minore *acuto*.

1.° TEOREMA. *Un giro equivale alla somma di quattro angoli retti, o più brevemente, a quattro retti; un angolo piatto a due retti.*

2.° TEOREMA. *Gli angoli retti sono eguali.*

Infatti se gli angoli piatti sono eguali, le loro metà, cioè gli angoli retti, sono eguali (n. 76, 4.°, Cor.°).

78. Due angoli, la cui somma è eguale ad un retto, diconsi *complementari*.

TEOREMA. *Gli angoli complementari di angoli eguali sono eguali.*

Si dimostra come il teor. 73 (n. 71, 1.°).

§ 7.° Rette parallele.

79. Due rette AB, CD (fig. 13) tagliate da una terza GH nei punti E, F formano otto angoli; di questi i quattro angoli $\widehat{AEH}$, $\widehat{HEB}$, $\widehat{CFG}$, $\widehat{GFD}$ si dicono *esterni*, e gli altri quattro, *interni* rispetto alle AB e CD.

Due angoli non adiacenti, uno interno e l'altro esterno e dalla stessa banda della secante GH si dicono *corrispondenti*, come $\widehat{HEB}$, $\widehat{EFD}$.

Due interni o due esterni non adiacenti si dicono *alterni*, se da bande opposte della GH, *coniugati* se dalla stessa banda.

Così gli angoli $\widehat{AEF}$, $\widehat{EFD}$

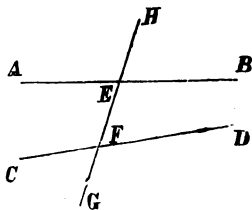


Fig. 13.

sono alterni interni; $\widehat{AEH}$, $\widehat{GFD}$ alterni esterni; $\widehat{BEF}$, $\widehat{EFD}$ coniugati interni; $\widehat{HEB}$, $\widehat{DFG}$ coniugati esterni.

Gli otto angoli danno così luogo a quattro coppie di corrispondenti: oppure a due coppie di alterni interni ed a due di alterni esterni; od ancora a due coppie di coniugati interni ed a due di coniugati esterni.

I coniugati interni da una banda della segante sono eguali ai coniugati esterni dall'altra banda. perchè opposti al vertice; così per es., $\widehat{BEF}$ ed $\widehat{EFD}$ sono eguali rispettivamente ad $\widehat{AEH}$ e $\widehat{CFG}$. Per la stessa ragione due alterni interni, come $\widehat{AEF}$, $\widehat{EFD}$ sono eguali ai due alterni esterni $\widehat{HEB}$, $\widehat{CFG}$. Perciò parlando di alterni e di coniugati, ci riferiremo solo agli interni, perchè le stesse cose varranno anche per gli esterni (opposti al vertice).

80. 1.° TEOREMA. *Se due rette tagliate da una terza formano:*

- 1.° o una coppia di corrispondenti eguali,
 - 2.° o una coppia di alterni eguali,
 - 3.° o una coppia di coniugati supplementari,
- tutte le coppie di corrispondenti e di alterni sono eguali, e le coppie di coniugati sono supplementari.*

Sieno le rette AB, CD (fig. 13) tagliate dalla GH nei punti E, F. Comunque sieno queste rette, si ha che $\widehat{HEB} = \widehat{AEF}$ e $\widehat{EFD} = \widehat{CFG}$, perchè opposti al vertice; per la stessa ragione $\widehat{AEH} = \widehat{BEF}$ e $\widehat{CFE} = \widehat{DFG}$; di più questi quattro angoli sono ordinatamente supplementari dei primi.

Ne consegue che, se si verifica una delle condizioni enunciate nel teorema, i primi quattro angoli sono eguali tra loro; lo stesso vale degli altri

quattro. Perciò combinandoli a due a due nel modo indicato dalle definizioni (n. 79) risultano verificate tutte le condizioni enunciate.

Il fatto che ciascuna delle condizioni esposte nel teorema precedente trae con sè necessariamente le altre, conduce a concludere che, mancandone una manchino necessariamente le altre. Perciò sono vere anche le proposizioni contrarie a quelle contenute nel teorema stesso, proposizioni che riassumiamo così:

2.° TEOREMA. *Se due rette tagliate da una terza non soddisfanno ad una delle condizioni enunciate nel teorema precedente, non soddisfanno a nessuna altra.*

Si fa notare che la somma dei quattro interni è sempre eguale a $4\widehat{R}$; perciò in questo caso da una banda della segante la somma dei coniugati interni è maggiore di $2\widehat{R}$, dall'altra minore.

81. Due o più rette (nel piano) che non s'incontrano si dicono *parallele*. Ad esempio

TEOREMA. *Due o più rette perpendicolari ad una medesima retta sono parallele.*

Infatti se si incontrassero, pel loro punto comune passerebbe più di una perpendicolare ad una stessa retta, il che è impossibile (n. 76).

82. 1.° TEOREMA. *Due rette, che tagliate da una terza soddisfanno ad una delle condizioni, di cui al Teor. 80, 1.° (e quindi alle altre), sono parallele.*

Sieno le due rette AB, CD (fig. 14) tagliate dalla GH nei punti E, F che soddisfanno alle note condizioni. Si faccia muovere la figura nel piano per modo che il segmento EF ricada nella primitiva posizione, ma capovolto. È chiaro allora che i

prolungamenti EG, FH del segmento stesso si scambiano di posizione, e per l'eguaglianza degli angoli $\widehat{AFE}$, $\widehat{FED}$, la stessa cosa avviene dei raggi ED, FA, nonchè dei loro opposti EC, FB: in conclusione la figura coincide colla sua posizione iniziale. Ciò posto, se i due raggi ED, FB avessero un punto comune O, questo, dopo il descritto movimento della figura, cadrebbe in punto O', che dovrebbe essere comune ai due raggi FA, EC; ed allora le due rette AB, CD avrebbero due punti comuni, il che è impossibile. Dunque le AB, CD sono parallele.

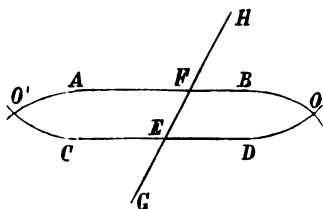


Fig. 14.

2.^o TEOREMA. *Due rette, che tagliate da una terza non soddisfanno alle condizioni di cui al Teor. 80, 1.^o possono incontrarsi da quella banda della secante dove la somma dei coniugati interni è minore di $2\widehat{R}$.*

Siano le due rette AB, CD (fig. 15) che tagliate dalla GH nei punti E, F non soddisfanno alle dette condizioni, e sia $\widehat{BEF} + \widehat{EFD}$

$< 2\widehat{R}$: siccome

$$\widehat{HEB} + \widehat{BEF} = 2\widehat{R}$$

si ha

$$\widehat{BEF} + \widehat{EFD} < \widehat{HEB} + \widehat{BEF}$$

da cui

$$\widehat{EFD} < \widehat{HEB},$$

cioè l'interno minore del corrispondente esterno. Si faccia muovere la figura per modo che la GH scorra su sè stessa fino a che F cada in E: il raggio FD assumerà una posizione EM tale che risulti: $\widehat{HEM} = \widehat{EFD}$, perciò interna ad $\widehat{HEB}$ e pa-

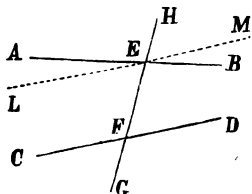


Fig. 15.

parallela a FD, e il raggio opposto FC cadrà in EL interno ad $\widehat{AEF}$. Riportando la figura nella posizione iniziale si osserva che i raggi EA, FC non possono incontrarsi, perchè situati da bande opposte del raggio EL, mentre ciò è possibile per i loro opposti EB, FD per essere dalla stessa banda del raggio EM.

83. Che l'incontro avvenga effettivamente non si può dimostrare; noi però l'ammettiamo, perchè non contraddetto nè dall'esperienza, nè da nessuna delle verità esposte. Si ha dunque il

POSTULATO. *Due rette, che tagliate da una terza non soddisfanno alle condizioni del Teor. 80, 1.º si incontrano da quella banda della secante, dove la somma dei coniugati interni è minore di $2\widehat{R}$.*

84. Si deduce senz'altro che:

TEOREMA. *Da un punto ad una retta si può condurre una parallela ed una sola.*

Infatti le precedenti considerazioni mostrano, come pel punto E si possa far passare la LM parallela alla CD, ma che ogni altra retta condotta per E incontra la CD.

COROLLARIO. 1.º *Due rette parallele ad una terza sono parallele tra loro.*

Infatti se si incontrassero, vi sarebbe un punto (il punto comune), pel quale passerebbero due rette parallele alla terza, il che non può essere.

COROLLARIO 2.º *Se due rette sono parallele, una terza retta che ne incontra una, incontra anche l'altra.*

85. Sono vere anche le reciproche delle proposizioni del n. 80 e cioè:

1.º TEOREMA. *Due rette parallele tagliate da una terza formano:*

- 1.° *i corrispondenti eguali,*
- 2.° *gli alterni eguali,*
- 3.° *i coniugati supplementari.*

Infatti, ove queste condizioni non si verificassero, le rette si incontrerebbero (n. 83 Postul.) contro l'ipotesi.

COROLLARIO. *Se due rette sono parallele, la perpendicolare all'una lo è anche all'altra.*

2.° TEOREMA. *Due rette concorrenti tagliate da una terza non soddisfanno alle note condizioni, e dalla banda del punto d'incontro la somma dei coniugati interni è minore di $2\widehat{R}$.*

Se le AB, CD (fig. 15) tagliate dalla HG nei punti E, F sono concorrenti a destra della secante dico che dalla stessa banda si ha: $\widehat{BEF} + \widehat{EFD} < 2\widehat{R}$. Infatti, ove ciò non fosse, dovrebbe essere o $\widehat{BEF} + \widehat{EFD} = 2\widehat{R}$, oppure $\widehat{BEF} + \widehat{EFD} > 2\widehat{R}$. Ma nel primo caso le rette AB, CD sarebbero parallele contro l'ipotesi; nel secondo risulterebbe $\widehat{AEF} + \widehat{EFC} < 2\widehat{R}$ (80 2.° T. Osserv.) e le rette s'incontrerebbero a sinistra della secante contro l'ipotesi. Dunque $\widehat{BEF} + \widehat{EFD} < 2\widehat{R}$.

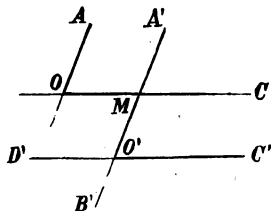
OSSERVAZIONE. Ne consegue che dalla banda del punto d'incontro un angolo interno è minore del corrispondente esterno.

86. Due raggi paralleli sono *nella stessa direzione*, come OA, O'A' (fig. 16), se situati dalla stessa banda della OO'; *in direzione opposta*, come OA, O'B' se da bande opposte della OO'.

TEOREMA. *Due angoli convessi coi lati ordinatamente nella stessa direzione, come $\widehat{AOC}$, $\widehat{A'O'C'}$ (figura 16) o in direzione opposta, come $\widehat{AOC}$, $\widehat{B'O'D'}$, sono eguali: due angoli con una coppia di lati nella*

stessa direzione e l'altra coppia in direzione opposta, come $\widehat{AOC}$, $\widehat{A'O'D'}$, sono supplementari.

Infatti: 1.° Se M è il punto d'incontro dei raggi OC , $O'A'$ si ha (n. 85. 1.°):



$\widehat{AOC} = \widehat{A'MC}$ e $\widehat{A'O'C'} = \widehat{A'MC}$
perciò $\widehat{AOC} = \widehat{A'O'C'}$.

2.° $\widehat{B'O'D'} = \widehat{A'O'C'}$ (74, 1.°)
e $\widehat{AOC} = \widehat{A'O'C'}$ (1.° caso)
dunque

Fig. 16.

$$\widehat{B'O'D'} = \widehat{AOC};$$

3.° $\widehat{A'O'D'}$ è supplementare di $\widehat{A'O'C'}$ e $\widehat{A'O'C'} = \widehat{AOC}$, dunque $\widehat{A'O'D'}$ è supplementare di $\widehat{AOC}$ (n. 73).

87. Due parallele dividono il piano in tre parti di cui quella compresa tra le due parallele dicesi *striscia*.

Ritenendo le due parallele come i *lati* della striscia, si possono definire le striscie adiacenti, la somma, la differenza delle striscie ecc...; si può insomma ripetere quanto è stato detto per gli angoli, ciò che lasciamo per esercizio allo studioso.

Le striscie sono grandezze di prima specie; anche per esse vale quanto si è detto al § 5.°

CAPITOLO I.

I POLIGONI

§ 1.º Definizioni.

88. Una spezzata è *chiusa*, quando i suoi estremi coincidono, come ABCDEA (fig. 17); altrimenti è *aperta*.

89. Una spezzata (piana) chiusa divide il piano in due parti, una finita che dicesi *poligono (polilatero)* l'altra indefinita. La spezzata è il *contorno* del poligono: i vertici ed i lati della spezzata sono *i vertici* ed *i lati* del poligono. La somma dei lati dicesi il *perimetro* del poligono.

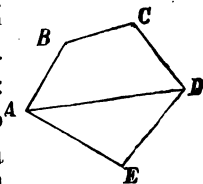


Fig. 17.

Un poligono si legge enunciandone successivamente i vertici: così si dice il poligono ABCDE (fig. 17).

90. Un poligono è *convesso* o *concavo* o *intrecciato* secondo che è convesso o concavo o intrecciato il suo contorno. Così il poligono ABCDE (fig. 17) è convesso, il poligono LMNO (fig. 18) è concavo, ed il poligono FGHI (fig. 18) è a contorno intrecciato.

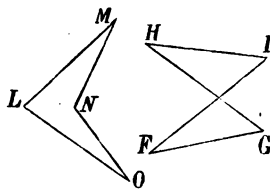


Fig. 18.

Noi considereremo sempre poligoni convessi.

91. *Diagonale* d'un poligono è il segmento che unisce due vertici non consecutivi, come AD nel poligono ABCDE.

TEOREMA. Se n è il numero dei vertici d'un poligono, il numero delle diagonali è $\frac{n(n-3)}{2}$.

Infatti da un vertice A (fig. 17) si possono condurre tante diagonali quanti sono i vertici meno tre (cioè meno A e i due vertici B, E a cui terminano i lati che concorrono in A), cioè $n-3$: i vertici essendo n , si avrebbero in tutto $n(n-3)$ diagonali. Ma, così facendo, ciascuna diagonale, come AD p. es., è contata due volte, l'una come diagonale condotta da A, l'altra come diagonale condotta da D: perciò il numero delle diagonali è: $\frac{n(n-3)}{2}$.

92. *Angoli interni*, o semplicemente *angoli* del poligono si dicono quelli contenuti da ciascun lato col successivo (prolungati).

Il poligono convesso non può avere che angoli convessi, ed è interno a ciascuno de' suoi angoli.

Difatti, se nel poligono convesso ABCD (fig. 19) si prolunga un lato per es. AB, si formano in A ed in B due angoli piatti dalla stessa banda del poligono, e i lati AD, BC (che sono dalla stessa banda rispetto ad AB) cadono rispettivamente negli angoli piatti in A ed in B; perciò gli angoli del poligono cogli stessi vertici A e B sono minori dei rispettivi angoli piatti, cioè sono convessi. Lo stesso dicasi per gli altri lati.

Dopo ciò, è chiaro che il poligono convesso è

precisamente quella parte di piano che è comune a tutti i suoi angoli.

93. Se si prolungano in ambe le direzioni i lati di un poligono, intorno ad ogni vertice si formano quattro angoli; cioè l'interno, il suo opposto al vertice, ed altri due, che si dicono *esterni* al poligono e che sono eguali: di solito se ne considera uno solo per ciascun vertice.

94. Un poligono ha tanti lati, quanti sono i vertici, cioè gli angoli, e non può avere meno di tre lati; quando ne ha tre dicesi *triangolo* (trilatero); si dice *quadrangolo* (quadrilatero) se ne ha quattro; *pentagono* se ne ha cinque; *esagono* se ne ha sei ecc.

Un lato del poligono è *adiacente* agli angoli che hanno i vertici nei suoi estremi. In un triangolo poi un lato ed un angolo non adiacenti si dicono *opposti*.

I lati e gli angoli di un poligono si dicono anche i suoi *elementi*.

95. Una retta che passa per un punto O interno ad un poligono ha certamente punti esterni al poligono su entrambe le direzioni che partono da O; epperò incontra necessariamente il contorno del poligono in almeno due punti E, F (fig. 19) situati da bande opposte del punto O: e se il poligono è convesso in non più di due punti. Infatti se lo incontrasse in più di due punti, p. es. in tre, uno di questi sarebbe interno al segmento che ha per estremi gli

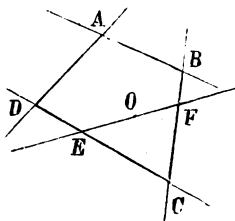


Fig. 19.

altri due, ed il lato del poligono passante per quel punto non lascierebbe il poligono tutto da una banda, contro l'ipotesi.

§ 2.° Alcuni teoremi sui poligoni. Sugli angoli.

96. TEOREMA. *La somma degli angoli d'un triangolo è uguale a due retti.*

Nel triangolo ABC (fig. 20) si prolunghi AB in D e si conduca BE parallela ad AC, la quale cadrà necessariamente nell'angolo CBD, per essere

$\widehat{CBD} > \widehat{CAB}$ (n. 85, 2.° T. osserv.).
Si verifica facilmente che (n. 85, Teor. 1.°)

$\widehat{CAB} = \widehat{EBD}$ e $\widehat{ACB} = \widehat{CBE}$
e perciò i tre angoli del triangolo sono eguali ai tre angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{CBE}$, $\widehat{EBD}$, la cui somma è appunto eguale a $2\widehat{R}$.

COROLLARIO. 1.° *Un angolo esterno d'un triangolo è eguale alla somma dei due interni non adiacenti, perciò è maggiore di ciascuno dei due.*

Infatti $\widehat{CBD} = \widehat{CBE} + \widehat{EBD} = \widehat{ACB} + \widehat{CAB}$.

COR. 2.° *In un triangolo non vi può essere che un solo angolo retto, od un solo angolo ottuso.*

COR. 3.° *In un triangolo rettangolo i due angoli acuti sono complementari.*

COR. 4.° *Se due angoli d'un triangolo sono eguali a due angoli di un altro triangolo (od anche se la somma dei primi due è eguale alla somma degli altri due), il terzo angolo del primo triangolo è uguale al terzo angolo del secondo.*

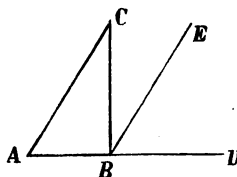


Fig. 20.

97. Un triangolo è *acutangolo* se ha i tre angoli acuti; *ottusangolo*, se ha un angolo ottuso; *rettangolo*, se ha un angolo retto. In questo ultimo caso si dice *ipotenusa* il lato opposto all'angolo retto; e si dicono *cateti* i due che lo comprendono.

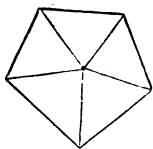


Fig. 21.

98. TEOREMA. *La somma degli angoli d'un poligono è eguale a tante volte $2\widehat{R}$ quanti sono i lati meno $4\widehat{R}$.*

Se n è il numero dei lati del poligono, congiungendo un punto interno coi vertici (fig. 21) si formano n triangoli. Ora la somma degli angoli del poligono è eguale alla differenza fra la somma degli angoli dei triangoli e quella degli angoli intorno al punto fissato. Ma la prima somma è eguale a $2n\widehat{R}$, la seconda a $4\widehat{R}$; dunque la somma cercata è uguale a $2n\widehat{R} - 4\widehat{R}$.

99. TEOREMA. *La somma degli angoli esterni di un poligono è eguale a $4\widehat{R}$.*

Se n è il numero dei vertici del poligono, la somma degli angoli interni e degli esterni è eguale a $2n\widehat{R}$; ma la prima somma è eguale a $2n\widehat{R} - 4\widehat{R}$, dunque l'altra è eguale a $4\widehat{R}$.

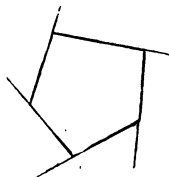


Fig. 22.

OSSERVAZIONE. S'intende che in ogni vertice si considera un solo angolo esterno.

COROLLARIO. *In un poligono non vi possono essere più di tre angoli acuti.*

Infatti se un angolo del poligono è acuto, il suo adiacente esterno è ottuso. Ora, se il poligono avesse più di tre angoli acuti, avrebbe più di tre

angoli esterni ottusi: il che è impossibile per essere la somma degli angoli esterni eguale a $4\widehat{R}$.

§ 3.° Sui lati.

100. 1.° TEOREMA. *Se due lati di un triangolo sono eguali, gli angoli opposti sono eguali.*

Se nel triangolo ABC (fig. 23) è $AB = AC$, ribaltando il triangolo sul piano in modo che l'angolo in $\widehat{A}$ ricada nella posizione iniziale, i punti B e C, non che gli angoli in $\widehat{B}$ ed in $\widehat{C}$ si scambiano di posizione: dunque questi angoli sono eguali.

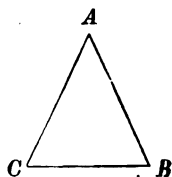


Fig. 23.

Un triangolo che ha due lati eguali dicesi *isoscele*; il terzo lato dicesi *base*. Il teorema precedente si usa enunciare dicendo:

Un triangolo isoscele ha gli angoli alla base eguali.

COROLLARIO. *Un triangolo, che ha i tre lati eguali ossia è equilatero, ha i tre angoli eguali, ossia è equiangolo.*

2.° TEOREMA. *Se due lati d'un triangolo sono diseguali, gli angoli opposti sono diseguali nello stesso senso, cioè al maggior lato è opposto il maggior angolo.*

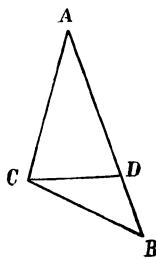


Fig. 24.

Se nel triangolo ABC (fig. 24) è $AB > AC$, preso, $AD = AC$ e condotto CD, si ha:

$\widehat{ACB} > \widehat{ACD}$, $\widehat{ACD} = \widehat{ADC}$ (n. 100, 1.°)

$\widehat{ADC} > \widehat{ABC}$ (n. 96 Cor. 1.°)

dunque $\widehat{ACB} > \widehat{ABC}$.

101. Reciprocamente:

1.° TEOREMA. *Se due angoli d' un triangolo sono eguali i lati opposti sono eguali.*

2.° TEOREMA. *Se due angoli d' un triangolo sono diseguali, i lati opposti sono diseguali nello stesso senso, cioè al maggior angolo è opposto il maggior lato.*

Questi due teoremi si dimostrano per assurdo.

COROLLARIO. *Nel triangolo rettangolo l' ipotenusa è maggiore di ciascuno dei cateti.*

102. TEOREMA. *In un triangolo un lato è minore della somma degli altri due ⁽¹⁾.*

Nel triangolo ABC (fig. 25) sia AC il lato maggiore. Si prolunghi AB, e sul prolungamento si prenda $BD = BC$; si congiunga D con C. Si ha: $\widehat{BDC} = \widehat{BCD}$, perchè il triangolo BDC è isoscele; ma $\widehat{BCD} < \widehat{ACD}$, da cui $\widehat{BDC} < \widehat{ACD}$. Perciò nel triangolo ACD è $AC < AD$ (n. 101, 2^a), ossia $AC < AB + BD$, o finalmente $AC < AB + BC$.

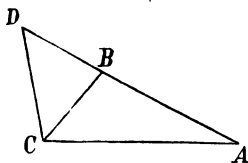


Fig. 25.

COROLLARIO. *In un triangolo un lato è maggiore della differenza fra gli altri due.*

Infatti se $AC < AB + BC$, togliendo BC si ha (n. 71, 5.°),

$$AC - BC < AB$$

e togliendo invece AB

$$AC - AB < BC$$

è evidente poi che

$$AC > AB - BC.$$

(1) Il teorema dà la condizione necessaria, perchè tre segmenti possano essere lati di un triangolo; si vedrà più innanzi che tale condizione è anche sufficiente.

103. TEOREMA. *In un poligono un lato è minore della somma degli altri.*

Nel poligono ABCDE (fig. 17) si conducano le diagonali da un vertice A; sieno AD, AC. Si ha: $AE < AD + DE$, $AD < AC + CD$, $AC < AB + BC$.

Addizionando membro a membro e togliendo dalle due somme le parti comuni AD, AC, si ha:

$$AE < AB + BC + CD + DE.$$

OSSERVAZIONE. Di tutte le linee (retta o spezzate) che terminano a due punti, il segmento è la minore. Perciò il segmento dicesi anche la *distanza* dei due punti.

104. Un poligono si dice che è *inviluppato* da un altro poligono, quando è tutto interno a questo.

TEOREMA. *Il perimetro di un poligono convesso è minore del perimetro di un poligono qualunque che lo inviluppa.*

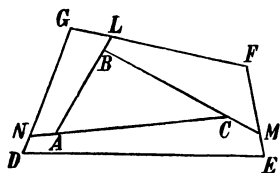


Fig. 26.

Il poligono ABC (fig. 26) sia inviluppato dal poligono DEFG. Si prolunghino i lati AB, BC, CA da una sola banda ad incontrare il contorno dell'altro poligono in

L, M, N. Dal poligono ANGL si ha:

$$AB + BL < AN + NG + GL$$

dal poligono BLFM:

$$BC + CM < BL + LF + FM$$

dal poligono DEMCN;

$$CA + AN < ND + DE + EM + MC.$$

Sommando membro a membro e togliendo le parti AN, BL, CM comuni alle due somme, si ha:

$$AB + BC + CA < GF + FE + ED + DG.$$

OSSERVAZIONE. Il poligono inviluppato può avere qualche lato sul contorno dell'altro, come ad es. il poligono $ABDC$ (fig. 27) che ha il lato AB comune col poligono $ABFE$ che lo inviluppa. Togliendo il segmento AB comune ai due contorni, si hanno due spezzate $ACDB$, $AEFB$, di cui

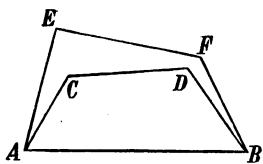


Fig. 27.

la prima dicesi *inviluppata* dalla seconda: ed è manifesto che la prima è minore della seconda. Perciò:

COROLLARIO. *Una spezzata convessa è minore di un'altra qualunque cogli stessi estremi, e che la inviluppi (cioè che si trovi dalla stessa banda della retta che passa per gli estremi).*

§ 4.º Sull'eguaglianza dei triangoli e dei poligoni.

105. TEOREMA. *Se due triangoli hanno un lato e i due angoli adiacenti a questo lato rispettivamente eguali, hanno pure eguali gli altri elementi opposti ad elementi eguali, ed i due triangoli sono eguali.*

Se i due triangoli ABC , $A'B'C'$ (fig. 28) hanno $BC = B'C'$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$, sovrapponendo il secondo triangolo al primo in modo che $B'C'$ coincida con BC , e precisamente B' con B , anche C' cade in C , ed i lati $B'A'$, $C'A'$ cadranno rispettiva-

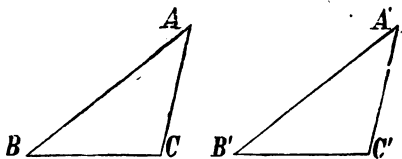


Fig. 28.

mente sui lati BA, CA per essere $\widehat{B'} = \widehat{B}$ e $\widehat{C'} = \widehat{C}$. Di più il punto A' (comune alle rette B'A', C'A') dovrà coincidere con A (comune alle rette BA, CA). Perciò $A'B' = AB$, $A'C' = AC$, $\widehat{A} = \widehat{A'}$ ed i due triangoli sono eguali.

COROLLARIO 1.º *Se due triangoli hanno un lato, l'angolo opposto ed un angolo adiacente rispettivamente eguali, hanno eguali anche gli altri elementi opposti ad elementi eguali, ed i due triangoli sono eguali.*

Se i due triangoli ABC, A'B'C' hanno $BC = B'C'$, $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, dev'essere anche $\widehat{C} = \widehat{C'}$ (n. 96, Cor. 4.º) e si è così ridotti al teor. 105.

COROLLARIO 2.º *Due triangoli rettangoli sono eguali, se hanno eguali e similmente posti un cateto ed un angolo acuto, oppure se hanno eguali l'ipotenusa ed un angolo acuto.*

106. 1.º TEOREMA. *Se due triangoli hanno due lati e l'angolo compreso rispettivamente eguali, hanno eguali gli altri elementi opposti ad elementi eguali, ed i due triangoli sono eguali.*

Si dimostra come il precedente per sovrapposizione.

COROLLARIO. *Due triangoli rettangoli sono eguali, se hanno i cateti rispettivamente eguali.*

2.º TEOREMA. *Se due triangoli hanno due lati rispettivamente eguali e gli angoli compresi diseguali, hanno i lati opposti a questi angoli diseguali nello stesso senso.*

Nei due triangoli ABC, A'B'C' (fig. 29) sia $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ ed $\widehat{ABC} > \widehat{A'B'C'}$: dico $AC > A'C'$. Suppongasi $AB < BC$ e si sovrapponga il triangolo A'B'C' al triangolo ABC in modo

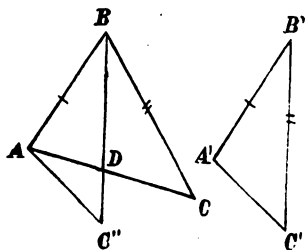


Fig. 29.

che $B'A'$ coincida con BA e precisamente B' cada in B ed A' in A . Il lato $B'C'$ cade entro l'angolo ABC : di più il punto C' cade fuori del triangolo ABC . Infatti ogni segmento che unisce un punto del lato AC con B , come BD , formando con AC due angoli

di cui uno almeno è retto od ottuso, il lato opposto a questo angolo è maggiore di BD : ora questo lato non può esser che BC , per essere $BC > AB$; perciò $B'C' = BC$ interseca AC in un punto D . Ciò posto sia ABC'' la nuova posizione del triangolo $A'B'C'$. Si avrà (102):

$AD + DC'' > AC''$ e $BD + DC > BC$
ed addizionando membro a membro:

$$AC + BC'' > BC + AC''$$

e togliendo $BC = BC''$ si ha:

$$AC > AC'', \text{ ed anche } AC > A'C'.$$

107. Reciprocamente:

1.° TEOREMA. *Se due triangoli hanno due lati eguali a due lati ed il terzo eguale al terzo (cioè hanno i tre lati rispettivamente eguali) hanno eguali gli angoli opposti ai lati eguali ed i due triangoli sono eguali* ⁽¹⁾

⁽¹⁾ Dai teoremi sull'eguaglianza dei triangoli consegue che: *Una figura piana che ha due punti fissi è immobile nel suo piano.*

Ed infatti se i punti A, B d'una figura (fig. 29) sono fissi e un terzo punto C della figura potesse prendere una altra posizione C'' (situata naturalmente dalla stessa banda di C rispetto ad AB), ne verrebbe che il triangolo ABC potrebbe prendere la posizione ABC'' , cioè i triangoli ABC, ABC'' sarebbero eguali, e precisamente $BC = BC''$ ed $AC = AC''$, da cui $BAC = BAC''$ ed $ABC = ABC''$, il che è impossibile

2.° TEOREMA. *Se due triangoli hanno due lati eguali a due lati ed il terzo diseguale al terzo, hanno gli angoli, opposti a questi lati, diseguali nello stesso senso.*

Questi due teoremi si dimostrano per assurdo.

108. Dato un poligono qualunque, è evidente che se ne può immaginare un altro che abbia i lati e gli angoli ordinatamente eguali a quelli del primo, e che questi due poligoni sono eguali. Per concludere però all'eguaglianza di due poligoni non è necessario sapere a *priori*, che tutti i lati e gli angoli dei due poligoni sono ordinatamente eguali, ma (come si è già veduto per i triangoli) l'eguaglianza di alcuni elementi è conseguenza di quella degli altri; ciò che appare dal seguente:

TEOREMA. *Se due poligoni d'equal numero di lati hanno i lati e gli angoli ordinatamente eguali, ad eccezione*

- 1.° *di due lati consecutivi e dell'angolo compreso,*
- 2.° *di un lato e dei due angoli adiacenti,*
- 3.° *di tre angoli consecutivi,*

sui quali non si fa alcuna ipotesi, anche questi elementi sono eguali, ed i poligoni sono eguali.

1.° CASO. I due poligoni ABCDE, A'B'C'D'E' (fig. 30) abbiano per ipotesi: $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CD = C'D'$, $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$, $\widehat{D} = \widehat{D'}$.

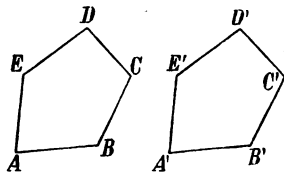


Fig. 30.

Sovrapponendo i due poligoni in modo che A cada su A' ed AB su A'B', è chiaro che anche B cade su B', BC su B'C' ecc., e così di seguito si possono far coincidere i vertici A, B, C, D del

primo coi vertici A' , B' , C' , D del secondo. Ora, per essere $\widehat{A} = \widehat{A'}$ e $\widehat{D} = \widehat{D'}$, i lati AE , DE cadranno necessariamente sui lati $A'E'$, $D'E'$, ed il punto E comune ai primi due dovrà cadere sul punto E' comune agli altri due. Perciò i due poligoni coincidono e sono eguali.

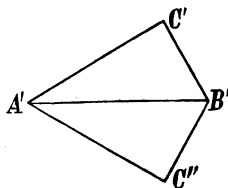
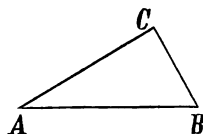
Analogamente si procede negli altri due casi.

OSSERVAZIONE. Se n è il numero dei lati d'un poligono, questo è determinato quando si conoscano $2n-3$ dei suoi elementi e la loro posizione relativa; e precisamente $n-2$ lati consecutivi e gli $n-1$ angoli adiacenti, oppure $n-1$ lati e gli $n-2$ angoli compresi, o ancora gli n lati ed $n-3$ angoli consecutivi. In particolare, un triangolo è determinato quando se ne conoscano un lato e due angoli (e la loro posizione relativa) oppure due lati e l'angolo compreso, o finalmente i tre lati.

§ 5.° Figure eguali direttamente ed inversamente.

109. Nel paragrafo precedente si sono cercate le condizioni di eguaglianza dei triangoli e dei poligoni. Vediamo ora una interessante distinzione intorno alle figure eguali.

Siano ABC , $A'B'C'$, (fig. 31), due triangoli eguali: A ed A' , B e B' , C e C' i vertici degli an-



goli eguali. Si ribalti il triangolo $A'B'C'$ sul piano facendolo rotare intorno ad $A'B'$; e sia $A'B'C''$ la

Fig. 31.

nuova sua posizione. Si faccia scorrere la figura $A'C'B'C''$ sul piano in modo che A' cada in A e B' in B : è chiaro che uno dei due triangoli, per es. $A'B'C'$, verrà a coincidere con ABC ; dell'altro triangolo $A'B'C''$ non è possibile ottenere la coincidenza col triangolo ABC (salvo casi eccezionali, come è detto in seguito) se non col rovesciarlo facendolo rotare intorno ad $A'B'$ (coincidente con AB).

Per distinguere i due casi noi diremo che i triangoli ABC , $A'B'C'$ sono eguali *direttamente*, mentre i triangoli ABC , $A'B'C''$ sono eguali *inversamente*.

La stessa cosa dicasi di due poligoni, i quali sono *direttamente eguali*, se la loro coincidenza può ottenersi facendo scorrere uno di essi opportunamente nel piano: sono *inversamente eguali*, se per ottenere la coincidenza occorre rovesciare uno di essi.

Da quanto è detto risulta, che se due triangoli o poligoni sono direttamente eguali, due osservatori che percorrano i contorni dei due poligoni, per modo da passare da vertici corrispondenti a vertici corrispondenti (diciamo *corrispondenti* i vertici di due angoli eguali), lasciano i due poligoni dalla medesima banda, cioè o entrambi a destra o entrambi a sinistra: se invece sono eguali inversamente li lasciano da bande opposte. Il che può servire a riconoscere se due poligoni sono eguali direttamente o inversamente senza spostare uno di essi.

Vi sono poi delle figure che, se sono eguali, lo sono tanto direttamente quanto inversamente. Ciò si verifica se queste figure rovesciate sul piano pos-

sono riprendere la primitiva posizione. Ad es. due triangoli isosceli, due cerchi, due settori.

110. Passando ora al concetto generale di figure eguali, si dirà che:

Due figure sono eguali (direttamente o inversamente), se a ciascun punto dell'una corrisponde uno ed un sol punto dell'altra in modo che tre punti dell'una e i tre corrispondenti dell'altra siano vertici di triangoli eguali (direttamente o inversamente). E se tre punti dell'una sono allineati (in linea retta), anche i corrispondenti dell'altra sono allineati, e i segmenti che hanno per estremi punti corrispondenti sono eguali.

Questa definizione è giustificata dal seguente:

TEOREMA. *Dati due segmenti eguali AB , $A'B'$ (fig. 32) se ai punti $C, D, E, \dots$ del piano che si considerino facenti parti d'una figura insieme con AB si fanno corrispondere rispettivamente i punti $C', D', E', \dots$ che si considerino facenti parte di un'altra figura insieme con $A'B'$ e tali che le coppie*

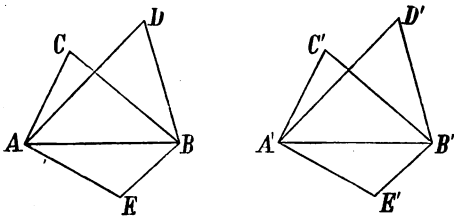


Fig. 32.

di triangoli ABC , $A'B'C'$; ABD , $A'B'D'$; ABE , $A'B'E'$; ... siano direttamente eguali e similmente disposti, le due figure sono direttamente eguali. E se le coppie di triangoli sono inversamente eguali, anche le due figure sono inversamente eguali.

Infatti se si fa scorrere la seconda figura sul piano fino a che A' coincida con A e B' con B , è

chiaro per l'ipotesi fatta che i punti $C', D', E'...$ vengono necessariamente a coincidere con $C, D, E,...$ sicchè le due figure coincidono e sono direttamente eguali.

Se invece i triangoli sono inversamente eguali si ottiene la loro coincidenza, e perciò quella delle due figure, rovesciandone una di esse.

È chiaro poi che punti allineati della seconda figura vanno a coincidere con punti allineati dell'altra.

111. Data adunque una figura $ABCDE....$ (fig. 32) il problema di costruire una figura eguale alla data sopra un segmento $A'B'$ corrispondente ad un segmento eguale AB della figura stessa è ridotto a costruire una serie di triangoli $A'B'C', A'B'D'...$, eguali (direttamente od inversamente) e similmente posti ai triangoli $ABC, ABD,...$ della figura data.

§ 6.° Proprietà del triangolo isoscele — Applicazione alla risoluzione di alcuni problemi.

112. 1.° TEOREMA. *In un triangolo isoscele la perpendicolare alla base, condotta dal vertice opposto divide questa e l'angolo opposto in due parti eguali.*

Nel triangolo ABC (fig. 33) sia $AB = AC$ e sia AD la perpendicolare a BC .

I due triangoli rettangoli ABD, ADC sono eguali per avere il cateto AD comune e $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ (n. 108, 1.°); perciò $BD = DC$ e $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$.

2.° Reciprocamente:

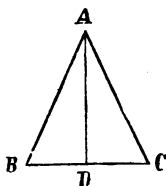


Fig. 33.

TEOREMA. *Se nel triangolo isoscele ABC una retta AD condotta per A divide la base o l'angolo opposto in due parti eguali, essa è perpendicolare alla base BC.*

Si dimostra facilmente per l'eguaglianza dei triangoli ABD, ACD, i quali nel primo caso hanno i tre lati rispettivamente eguali, nel secondo hanno gli angoli in A eguali e compresi da lati eguali.

OSSERVAZIONE. Dato un segmento BC (fig. 33) si possono sempre immaginare due angoli acuti uguali coi vertici in B, ed in C, come ABC ed ACB, ed allora nel triangolo isoscele ABC la perpendicolare AD a BC divide questo in due parti eguali. Così pure, dato un angolo CAB si possono sempre assegnare sopra i suoi lati due segmenti eguali AB, AC ed allora, uniti B e C col segmento BC, la AD perpendicolare a BC divide l'angolo dato in due parti eguali. Ne risulta adunque che la possibilità di dividere un segmento od un angolo in due parti eguali si connette intimamente con quella di condurre la perpendicolare da un punto ad una retta; anzi l'una è conseguenza dell'altra. Di più, siccome da un punto ad una retta non si può condurre che una sola perpendicolare, così tale divisione non si può fare che in un modo solo ⁽¹⁾.

(1) Potrà sembrare a taluno oziosa la osservazione che un segmento ed un angolo si possono dividere in due parti eguali in un modo solo. Ma senza cercare altre ragioni, ci basterà far notare che vi sono grandezze che si possono dividere in due parti eguali in una infinità di modi (per es. un parallelogrammo con una retta qualunque passante pel punto d'incontro delle diagonali, un cerchio da un diametro), come si vedrà più innanzi.

Applichiamo ora questa proprietà del triangolo isoscele a risolvere i detti problemi.

113. PROBLEMA. *Condurre da un punto dato la perpendicolare ad una retta data.*

Possono darsi due casi: 1.° il punto è dato sulla retta; 2.° il punto è dato fuori della retta.

1.° CASO. Sia AB la retta data (fig. 34) e C un punto su di essa. Fatto centro in C e con raggio arbitrario descrivasi una circonferenza che incontrerà la AB in due punti D, E . Centro in D e con un raggio maggiore di DC , p. es. eguale a DE , si descriva una circonferenza: centro in E e collo stesso raggio si descriva una seconda circonferenza: questa ha manifestamente un punto D interno alla prima ed un altro esterno situato sul prolungamento di DE . Le due circonferenze s'incontrano adunque in due punti

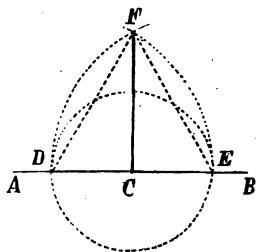


Fig. 34.

(n. 62): sia F uno di essi: congiungasi F con C , e la FC è la perpendicolare richiesta. — Allo studioso la dimostrazione (n. 112, 2.° Teor.).

2.° CASO. Sia AB la retta data (fig. 35) e C il punto fuori di essa. Si fissi un punto M sulla AB ; di poi centro in C e raggio maggiore di CM descrivasi una circonferenza, che dovrà incontrare la AB in due punti D, E ⁽¹⁾. Sopra il segmento DE e

(1) Ed infatti se il raggio è maggiore di CM , il punto M è interno alla circonferenza, perchè la sua distanza dal centro C è minore del raggio: perciò la AB , che ha il punto M interno alla circonferenza, incontra questa in due punti D, E (n. 61).

dalla banda opposta di C si operi come nel caso precedente: si avrà così un punto F: congiungasi F con C: la FC è la perpendicolare richiesta. Infatti, per l'eguaglianza dei triangoli CDF, CEF (107, 1.º), si ha: $\widehat{DCF} = \widehat{ECF}$: perciò nel triangolo isoscele DCE, la CF è perpendicolare a DE (n. 112, 2º Teor.).

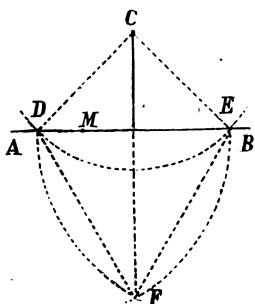


Fig. 35.

114. PROBLEMA. *Dividere un segmento in due parti eguali.*

Sia AB (fig. 36) il segmento. Centri successivamente A e B e raggio AB, descrivansi due circonferenze che si incontrino in due punti C, E: conducasi CE, che incontrerà AB in un punto D. Si avrà $AD = DB$. Infatti unendo C ed E con A e con B, per l'eguaglianza dei triangoli CAE, CBE (n. 107, 1.º) si ha: $\widehat{ACD} = \widehat{BCD}$: perciò nel triangolo equilatero ACB la CD è perpendicolare ad AB e lo divide in due parti eguali.

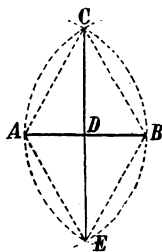


Fig. 36.

Il punto D è il *punto medio* del segmento AB.

115. PROBLEMA. *Dividere un angolo in due parti eguali.* Sia $\widehat{BAC}$ (fig. 37) l'angolo dato. Centro A e raggio arbitrario, descrivasi una circonferenza, che incontrerà i lati dell'angolo in due punti B, C: si unisca B con C e da A si conduca la perpendicolare a BC (n. 113, 2.º) e sia AD: questa divide l'angolo dato

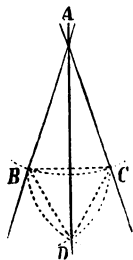


Fig. 37.

in due parti eguali (n. 112, 1.°), cioè $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$. Il raggio AD dicesi *bisettrice* dell'angolo $\widehat{DAC}$. Il prolungamento di AD è la bisettrice dell'angolo opposto al vertice a $\widehat{BAC}$ e dell'angolo concavo $\widehat{BAC}$.

§ 7.° Quadrilateri.

116. Il quadrangolo (quadrilatero) ha quattro angoli, quattro lati, due diagonali.

Due angoli o due lati non consecutivi diconsi *opposti*.

1.° TEOREMA. *La somma degli angoli d'un quadrangolo è uguale a quattro retti* (n. 98).

2.° TEOREMA. *Due quadrangoli sono eguali, se hanno eguali e similmente disposti*

1.° *tre angoli e i due lati adiacenti;*

2.° *tre lati ed i due angoli compresi;*

3.° *i quattro lati ed un angolo* (n. 108, Teor.).

117. Se due lati sono paralleli, il quadrilatero dicesi *trapezio*; i lati paralleli sono le *basi* del trapezio. Il trapezio è *rettangolo*, se un lato è perpendicolare alle basi; *isoscele*, se gli altri due lati non sono paralleli e sono eguali.

118. I quattro lati d'un quadrilatero possono essere a due a due paralleli, ed allora il quadrilatero dicesi *parallelogrammo* ⁽¹⁾. Le proprietà caratteristiche di questo quadrilatero sono contenute nel seguente:

1.° TEOREMA. *In un parallelogrammo*

1.° *gli angoli opposti sono eguali;*

(1) Talvolta, per brevità, scriveremo *pllg.* invece di *parallelogrammo*.

2.° i lati opposti sono eguali;

3.° ciascuna diagonale lo divide in due triangoli eguali;

4.° le diagonali si tagliano scambievolmente in parti eguali.

Sia ABCD (fig. 38) il pllgr. dato: le diagonali AC, BD s'incontrino in O.

1.° Gli angoli $\widehat{BAD}$, $\widehat{ADC}$ sono supplementari, perchè coniugati interni formati dalle parallele AB, DC colla secante AD: per la stessa ragione $\widehat{BAD}$, $\widehat{ABC}$ sono supplementari; perciò (n. 78, Teor.) $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$: similmente $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$.

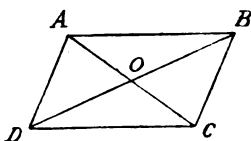


Fig. 38.

La seconda e la terza proprietà si deducono dall'eguaglianza dei triangoli $\triangle ABC$, $\triangle ADC$ i quali hanno il lato AC comune e gli angoli adiacenti a questo lato rispettivamente eguali (n. 85, 1.°); la quarta dall'eguaglianza dei triangoli $\triangle AOB$, $\triangle COD$ i quali hanno $AB = CD$ e gli angoli adiacenti a questo lato rispettivamente eguali (n. 85, 1.°).

Queste proprietà le abbiamo dette caratteristiche del parallelogrammo, perchè reciprocamente:

2.° TEOREMA. *Un quadrilatero, che soddisfa ad una delle quattro condizioni, sopra enunciate, è un parallelogrammo.*

1.^a Nel quadrangolo ABCD (fig. 38) siano $\widehat{A} = \widehat{C}$ e $\widehat{B} = \widehat{D}$. È chiaro allora che le somme $\widehat{A} + \widehat{B}$ e $\widehat{C} + \widehat{D}$ sono eguali, e ciascuna è la metà della somma dei quattro angoli; ossia è uguale a $2\widehat{R}$; perciò AD e BC sono parallele (n. 82, 1.° Teor.); così dicasi di AB e CD.

2.^a Se i lati opposti sono eguali, i triangoli ABC, ADC (fig. 38) sono eguali per avere i lati rispettivamente eguali; perciò $\widehat{BAC} = \widehat{ACD}$; da cui (n. 82, 1.^o) si conclude che AB e DC sono parallele. Similmente per le altre due.

3.^a Il quadrangolo ABCD sia diviso in due triangoli eguali da ciascuna diagonale. Dai triangoli ABC, ADC eguali si ha $\widehat{B} = \widehat{D}$, perchè opposti al lato comune AC: similmente dai triangoli DAB, DCB eguali si ha $\widehat{A} = \widehat{C}$: si ricade così nel 1.^o caso già considerato.

4.^a Se $AO = OC$ e $BO = OD$ (fig. 38) i triangoli AOB, COD sono eguali per avere gli angoli in O eguali e compresi da lati eguali; perciò $\widehat{BAO} = \widehat{OCD}$ e le rette AB, CD sono parallele (n. 82, 1.^o). Similmente per le altre due.

119. È pur vero che:

TEOREMA. *Un quadrangolo, che ha due lati paralleli ed eguali, è un parallelogrammo.*

Nella fig. 38 se AB è uguale e parallelo a CD i due triangoli ABD, BDC hanno $AB = CD$, BD comune, e $\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$; d'onde $\widehat{ADB} = \widehat{DBC}$ e perciò (n. 82, 1.^o) AD e BC sono parallele.

OSSERVAZIONE. Il punto d'incontro delle diagonali dicesi *centro* del parallelogrammo, perchè ogni segmento, che termina al contorno del parallelogrammo e passa per quel punto, è diviso da questo in due parti eguali. Ciascuno di questi segmenti poi divide il parallelogrammo in due parti eguali. La dimostrazione allo studioso.

120. Un angolo del parallelogrammo può esser retto; allora lo sono anche gli altri ed il parallelogrammo dicesi *rettangolo* (quadrangolo equiangolo).

La proprietà caratteristica del rettangolo (fra i parallelogrammi) è data dal seguente:

1.° TEOREMA. *Nel rettangolo le diagonali sono eguali.*

Se ABCD (fig. 39) è un rettangolo, si deduce l'eguaglianza delle diagonali AC, BD dall'eguaglianza dei triangoli ABC, BCD (n. 106, 1.° Teor.).

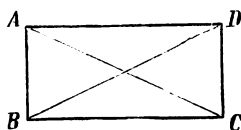


Fig. 39.

COROLLARIO. *In un triangolo rettangolo il punto medio dell'ipotenusa è equidistante dai tre vertici.*

2.° Reciprocamente:

TEOREMA. *Un parallelogrammo ABCD, che ha le diagonali eguali, è rettangolo.*

I triangoli ABC, BCD (fig. 39) per avere i lati rispettivamente eguali, sono eguali, perciò gli angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$, sono eguali. Ma sono anche supplementari, dunque sono retti.

121. Due lati consecutivi del parallelogrammo possono essere eguali: in questo caso sono eguali tutti e quattro i lati ed il parallelogrammo dicesi **rombo** (quadrilatero equilatero). La proprietà caratteristica del rombo (fra i parallelogrammi) è data dal seguente:

1.° TEOREMA. *Nel rombo le diagonali sono perpendicolari fra loro e bisettrici degli angoli.*

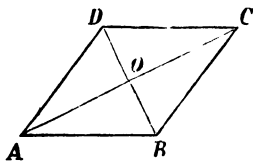


Fig. 40.

Se ABCD (fig. 40) è un rombo, il triangolo ABC è isoscele; e la BO, che da B va al punto medio O della base AC è perpendicolare ad AC e

bisettrice dell'angolo $\widehat{B}$ (n. 112, 2.° Teor.),

2.° Reciprocamente:

TEOREMA. *Un parallelogrammo, che ha le diagonali perpendicolari fra loro o bisettrici degli angoli, è un rombo.*

Se nel pllgr. ABCD (fig. 40) le diagonali si dimezzano in O ad angolo retto, i triangoli rettangoli DOC, BOC hanno i cateti eguali, perciò $DC = CB$.

Se la diagonale BD è bisettrice degli angoli in B ed in D, gli angoli $\widehat{BDC}$, $\widehat{DBC}$ sono eguali, perchè metà di angoli eguali; perciò nel triangolo BCD è $CB = CD$.

122. Un quadrilatero infine può essere equilatero ed equiangolo, ed allora è *regolare* e dicesi *quadrato*.

123. Da quanto precede risulta che:

1.° *Due parallelogrammi sono eguali, se hanno due lati e l'angolo compreso rispettivamente eguali.*

2.° *Due rettangoli sono eguali, se hanno due lati consecutivi rispettivamente eguali.*

3.° *Due rombi sono eguali, se hanno un lato ed un angolo rispettivamente eguali.*

4.° *Due quadrati sono eguali, se hanno un lato eguale.*

§ 8.° Distanze e luoghi geometrici.

124. *Proiezione* di un punto A sopra una retta MN (fig. 41) è l'estremo o *piede* A' del segmento perpendicolare ad MN condotto da A. La retta

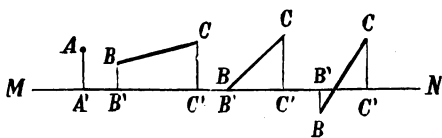


Fig. 41.

AA' dicesi la *proiettante* il punto A , e la MN l'*asse di proiezione*.

Se un punto giace sulla MN è proiezione di sè stesso.

125. *Proiezione* di un segmento BC sopra la MN è il segmento $B'C'$ compreso tra le proiezioni degli estremi B, C . Il segmento BC può avere un estremo sull'asse ed anche essere attraversato dall'asse, come nella figura.

La proiezione di un segmento si riduce ad un punto, se il segmento è perpendicolare all'asse, ed è eguale al segmento stesso, se questo è parallelo all'asse.

126. TEOREMA. 1.° *Se da un punto si conducono dei segmenti terminati ad una retta data,*

1.° *il segmento perpendicolare è il minimo;*

2.° *due segmenti che hanno proiezioni eguali, sono eguali;*

3.° *due segmenti che hanno proiezioni diseguali sono diseguali nello stesso senso.*

Dei segmenti che partono dal punto O e terminano alla MN (fig. 42):

1.° Se OA è perpendicolare, è minore di un altro qualsiasi OB (n. 101, Cor.).

2.° Se $AB = AC$, anche $OB = OC$ (n. 106, Cor.).

3.° Se $AD > AC$, sopra AD prendasi $AB = AC$; sarà $AD > AB$. Si conduca OB ; l'angolo $\widehat{OBD} > \widehat{OAB}$ (n. 95, Cor. 1.°), perciò $\widehat{OBD}$ è ottuso e maggiore di $\widehat{ODB}$ e nel triangolo OBD , sarà $OD > OB$ (n. 101, 2.° Teor.): ma $OB = OC$ dunque $OD > OC$.

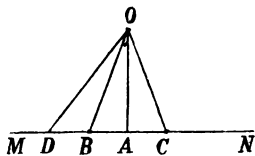


Fig. 42.

Reciprocamente:

2.° TEOREMA. *Se da un punto si conducono dei segmenti terminati ad una retta,*

1.° *il minimo è perpendicolare alla retta;*

2.° *due segmenti eguali hanno eguali proiezioni;*

3.° *due segmenti diseguali hanno proiezioni diseguali nello stesso senso.*

Si dimostra per assurdo.

COROLLARIO. 1.° *Da un punto ad una retta non si possono condurre più di due segmenti eguali tra loro.*

Infatti non vi sono che due segmenti, uno da una banda e l'altro dall'altra della perpendicolare che possono avere proiezioni eguali.

2.° *Due triangoli rettangoli, che hanno l'ipotenusa ed un cateto rispettivamente eguali sono eguali.*

Infatti questi due triangoli si possono sempre disporre come i triangoli OAC, OAB della fig. 42, facendo coincidere i cateti eguali in OA, ed allora gli altri due cateti si disporranno in linea retta, come AB, AC, e saranno eguali.

Il segmento OA dicesi la *distanza* del punto O dalla retta MN.

127. Date due parallele, se dai punti di una di esse si conducono le perpendicolari all'altra, i segmenti di queste compresi fra le due parallele sono eguali (n. 118, 1.°). Uno di essi si dice la *distanza* delle due parallele.

128. Quando tutti i punti d'una linea (o di un sistema di linee) e solo questi hanno una certa proprietà, si dice che quella linea (o quel sistema di linee) è il *luogo* dei punti aventi quella proprietà.

Ad es. la circonferenza è il luogo dei punti che hanno da un punto dato (il centro) una stessa distanza eguale ad un segmento dato (il raggio).

Per dimostrare che una linea è un luogo, si può procedere in due modi: o dimostrare che i punti della linea hanno la proprietà enunciata, e i punti fuori della linea non l'hanno, cioè la proposizione contraria: oppure che i punti della linea hanno la detta proprietà, e che se un punto la possiede, appartiene a quella linea, cioè la proposizione reciproca.

129. TEOREMA. *Il luogo dei punti, che hanno da una retta data una stessa distanza eguale ad un segmento dato, è formato da due parallele a questa retta ad una distanza eguale alla data.*

Siano AB (fig. 43) la retta data e PQ il segmento dato. Da un punto A della AB si conduca la perpendicolare alla AB, e su di essa dalle due bande del punto A si prendano i segmenti AC, AD eguali a PQ: le parallele alla AB condotte da C e da D costituiscono il luogo enunciato. Infatti un punto della CE o della DF ha dalla AB una distanza eguale ad AC o ad AD, e perciò eguale a PQ: ed un punto fuori di queste rette ha dalla AB una distanza maggiore o minore di PQ, secondo che si trova fuori della striscia compresa fra le parallele CE, DF, oppure nella striscia stessa.

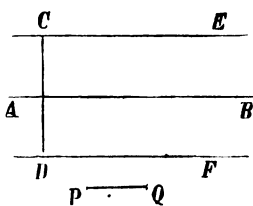
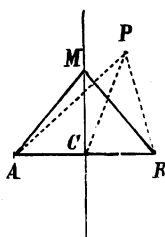


Fig. 43.

130. TEOREMA. *Il luogo dei punti equidistanti da due punti dati è la perpendicolare al segmento che li unisce passante pel punto medio del segmento stesso.*

Sia AB un segmento (fig. 44), C il punto medio e CM la perpendicolare. È chiaro che essendo



$CA = CB$ (n. 126, Teor.), per ogni punto M della CM si ha $MA = MB$. D'altra parte se P è fuori della CM , gli angoli $\widehat{PCA}$, $\widehat{PCB}$ saranno diseguali, e perciò (n. 106, 2.° Teor.) anche PA e PB saranno diseguali.

131. TEOREMA. *Il luogo dei punti equidistanti da due rette, che s'incontrano è costituito dalle, bisettrici dei loro angoli.*

Siano le due rette AB , CD (fig. 45) che si incontrano in O , e siano MQ , NP le bisettrici dei loro angoli. Preso un punto M sulla MQ e condotte le perpendicolari MF , ME alle AB e CD , è chiaro che i due triangoli rettangoli MOE , MOF sono eguali (n. 103, Cor. 2.°), perciò $ME = MF$.

D'altra parte se fosse $ME = MF$, congiunto M con O , i due triangoli rettangoli MOE , MOF sono ancora eguali, (n. 124, Corollario 2.°), perciò OM è bisettrice dell'angolo $\widehat{COA}$.

132. TEOREMA. *Il luogo dei punti equidistanti da due parallele è la parallela alle medesime condotta pel punto medio della loro distanza.*

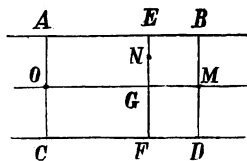


Fig. 46.

Se AB e CD (fig. 46) sono le due parallele, AC la loro distanza ed OM la parallela ad esse, condotta per O punto medio della AC , è chiaro che un punto G della OM ha dalle

AB e CD le distanze GE, CF che sono eguali rispettivamente ad OA, OC e perciò eguali tra loro; ed un punto N esterno alla OM ha le distanze NE, NF dalle AB e CD che sono diseguali.

OSSERVAZIONE. La OM è il luogo dei punti medi delle distanze delle parallele AB e CD, nonchè di ogni segmento che termina alle parallele stesse; e divide la striscia compresa dalle AB e CD in due striscie eguali.

COROLLARIO 1.º *In un triangolo il segmento, che unisce i punti medi di due lati, è parallelo al terzo lato, ed eguale alla metà di esso.*

Nel triangolo ABC (fig. 47) se D, E sono i punti medi dei due lati AB, AC, la DE è il luogo dei punti medi dei segmenti compresi tra BC e la parallela a BC, condotta per A; dunque è parallela alla BC. Per la stessa ragione se F è il punto medio di BC, sarà DF parallela ad AC. Allora la figura DECF è un pllgr., perciò

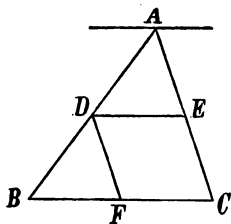


Fig. 47.

$$DE = FC = \frac{1}{2} BC \text{ (}^1\text{)}.$$

(¹) Questo corollario offre il modo di dimostrare che:

In un triangolo due mediane si dividono scambievolmente in due parti, che (a partire dal vertice) sono l'una doppia dell'altra.

Mediana di un triangolo è il segmento che unisce un vertice col punto medio del lato opposto.

Nel triangolo ABC siano CD, BE due mediane che s'incontrano in M. Si dimezzi MB in F ed MC in H, e si unisca F con H e D con E. I segmenti DE, FH sono paralleli

COROLLARIO II.° *In un trapezio il segmento, che unisce i punti medi dei lati non paralleli, è parallelo alle basi ed uguale alla loro semisomma.*

Nel trapezio ABCD (fig. 48) se E, F sono i punti medi dei lati non paralleli AD, BC, la EF è

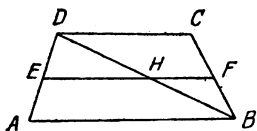


Fig. 48.

il luogo dei punti medi dei segmenti compresi fra AB e DC, perciò è parallela a queste rette. Di più la diagonale DB è dimezzata dalla EF in

H. Ciò posto, dal triangolo ADB si ha $EH = \frac{1}{2} AB$

e dal triangolo BCD si ha: $HF = \frac{1}{2} DC$: da cui

addizionando $EF = \frac{1}{2} (AB + DC)$.

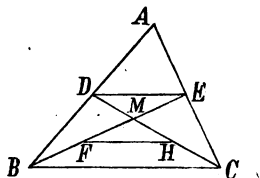
ed eguali, perchè paralleli a BC ed

eguali a $\frac{1}{2} BC$: perciò i triangoli

DME, FMH sono eguali (n. 103);

da cui $DM = MH = \frac{1}{2} MC$,

e $EM = MF = \frac{1}{2} MB$.



Se ne deduce senz' altro l' importante

TEOREMA. *In un triangolo le tre mediane concorrono in un punto.*

Infatti la terza mediana, se deve dividere una delle prime in due parti che (a partire dal vertice) sieno l' una doppia dell' altra, deve passare necessariamente per M.

CAPITOLO III

IL CERCHIO.

§ 1.° Angoli al centro, archi, settori.

133. Al n. 66 trattando degli angoli al centro degli archi e dei settori, si è osservato che in un dato cerchio vi è una certa corrispondenza di *posizione* fra queste grandezze. Aggiungiamo ora che in uno stesso cerchio od in cerchi eguali vi è tra le medesime una corrispondenza anche di estensione: quanto la riguarda si riassume nei seguenti teoremi.

1.° TEOREMA. *In uno stesso cerchio od in cerchi eguali,*

1.° *ad angoli al centro eguali corrispondono archi e settori eguali;*

2.° *se un angolo al centro è eguale alla somma di altri due, l'arco od il settore corrispondente al primo è eguale alla somma degli archi, o dei settori corrispondenti agli altri due;*

il che esprimeremo più brevemente dicendo: *all'angolo al centro somma corrisponde l'arco ed il settore somma.*

Nei due cerchi eguali O, O' (fig. 49).

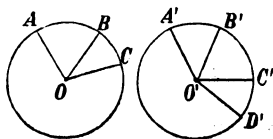


Fig. 49.

1.° se $\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$ è pure $\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$,
e settore $AOB =$ settore $A'O'B'$:

2.° Se $\widehat{AOC} = \widehat{A'O'B'} + \widehat{C'O'D'}$
è pure $\widehat{AC} = \widehat{A'B'} + \widehat{C'D'}$
e sett. $AOC =$ sett. $A'O'B' +$ sett. $C'O'D'$

COROLLARIO 1.° *In uno stesso cerchio od in cerchi eguali ad angoli al centro diseguali corrispondono archi e settori diseguali nello stesso senso.*

Nella fig. 49 se $\widehat{AOC} > \widehat{A'O'B'}$, ciò significa che $\widehat{AOC}$ può ritenersi la somma di un angolo $\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$ e di un altro $\widehat{BOC}$, perciò l'arco corrispondente $\widehat{AC}$ dovrà essere la somma di un arco $\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$ e di un altro; dunque $\widehat{AC} > \widehat{A'B'}$.

COROLLARIO 2.° *Ogni diametro divide il cerchio e la circonferenza in due parti eguali, che diconsi rispettivamente semicerchi e semicirconferenze.*

COROLLARIO 3.° *Due diametri perpendicolari dividono il cerchio e la circonferenza in quattro parti eguali, dette quadranti di cerchio e di circonferenza.*

2.° Reciprocamente:

TEOREMA. *In uno stesso cerchio od in cerchi eguali,*

1.° *ad archi e settori eguali corrispondono angoli al centro eguali.*

2.° *all'arco od al settore somma di altri due corrisponde l'angolo al centro somma dei due corrispondenti.*

COROLLARIO. Reciproco del cor. 1.°: allo studioso enunciarlo e dimostrarlo.

§ 2.º Corde.

134. Si dice *corda* il segmento che unisce due punti d'una circonferenza, come ad es. AB (fig. 50). La corda è tutta interna alla circonferenza, ed infatti i raggi OA, OB essendo eguali sono obliqui ad AB e maggiori della perpendicolare OM alla AB condotta da O. Il punto M (piede della perpendicolare) è dunque interno alla circonferenza e lo sono pure tutti i punti della corda AB, come estremi di segmenti obliqui minori di OA.

135. La corda si dice *sottesa* dall'arco che ha gli stessi estremi: ogni corda perciò è sottesa da due archi; ma ordinariamente si considera il minore di essi, quello cioè corrispondente all'angolo al centro convesso.

Un diametro è una corda, e gli archi che lo sottendono (semicirconferenze) essendo eguali, è indifferente considerare l'uno o l'altro.

Un diametro è maggiore di una corda che non passa pel centro, come AB (fig. 50), perchè se si uniscono gli estremi A e B col centro O, dal triangolo OAB si ha che $OA + OB$ (che è eguale ad un diametro) è maggiore di AB (n. 102).

136. TEOREMA. *In uno stesso cerchio od in cerchi eguali,*

1.º *archi eguali sottendono corde eguali;*

2.º *archi diseguali sottendono corde diseguali nello stesso senso* ⁽¹⁾.

(1) S'intende che si considerano, come si è già osservato, archi minori della semicirconferenza.

Nel cerchio O (fig. 50):

1.° se $\widehat{AB} = \widehat{CD}$, anche $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$, perciò i triangoli AOB, COD sono eguali (n. 106 1.°), da cui $AB = CD$.

2.° Se invece $\widehat{AB} > \widehat{CD}$, anche $\widehat{AOB} > \widehat{COD}$, e dai medesimi triangoli si ha: $AB > CD$ (n. 106, 2.° Teor.).

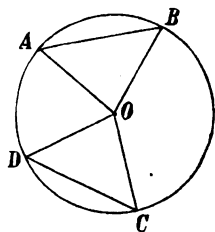


Fig. 50.

2.° Reciprocamente:

TEOREMA. *In uno stesso cerchio od in cerchi eguali,*

1.° *corde eguali sono sottese da archi eguali;*

2.° *corde diseguali da archi diseguali nello stesso senso.*

Si dimostra per assurdo.

OSSERVAZIONE. Sebbene fra gli archi e le corde vi sia una corrispondenza, come appare dai precedenti teoremi, si deve badare però che essa è ben diversa da quella fra gli angoli al centro, gli archi ed i settori: poichè in questo caso *all'arco somma di altri due non corrisponde la corda somma delle corde corrispondenti.*

137. **TEOREMA.** *In un cerchio il diametro perpendicolare alla corda divide la corda e gli archi da cui è sottesa in due parti eguali.*

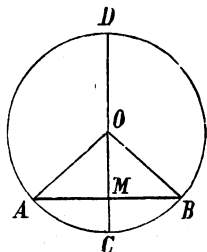


Fig. 51.

Infatti nel cerchio O (fig. 51) se AB è una corda e CD il diametro ad esso perpendicolare e che la incontra in M, il triangolo AOB essendo isoscele e la OM perpendicolare alla base, si ha: $AM = MB$ e $\widehat{AOC} = \widehat{COB}$ (n. 112, 1.° Teor.), da cui $\widehat{AC} = \widehat{CB}$ ed anche $\widehat{AD} = \widehat{BD}$.

COROLLARIO. *Il luogo dei punti medi di un sistema di corde parallele è il diametro ad esse perpendicolare.*

OSSERVAZIONE. La retta CD soddisfa a cinque condizioni, e cioè passa pel centro, è perpendicolare alla corda e divide questa e i due archi che la sottendono in due parti eguali. Si può verificare che, ammesse due di queste condizioni (sufficienti a determinare la retta), se ne deducono le altre tre. Si ottengono così diversi teoremi, fra cui è degno di nota il seguente:

TEOREMA. *In un cerchio la perpendicolare ad una corda nel punto di mezzo passa pel centro e dimezza gli archi corrispondenti.*

Difatti la perpendicolare alla corda AB (fig. 51) nel punto medio M è il luogo dei punti equidistanti da A e da B, perciò passa pel centro e per i punti medi dei due archi.

138. Questo teorema permette di risolvere i due problemi seguenti:

1.^o PROBLEMA. *Dividere un arco in due parti eguali.*

Sia $\widehat{AB}$ (fig. 51) l'arco dato. Colla nota costruzione (n. 114) si trovi la perpendicolare CD nel punto medio di AB; questa divide l'arco $\widehat{AB}$ in due parti eguali in M. Il solo punto M dimezza l'arco $\widehat{AB}$.

2. PROBLEMA. *Trovare il centro di una circonferenza data (o di un arco dato).*

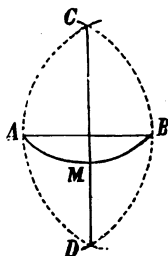


Fig. 52.

Sulla circonferenza data (o sull'arco dato) si prendano tre punti A, B, C (fig. 53) e si uniscano colle corde AB, BC. Si conducano le perpendico-

lari a queste corde pei loro punti medi; queste si incontrano necessariamente in un punto O , che è il centro cercato.

Difatti le dette perpendicolari devono entrambe passare pel centro; questo perciò non può essere che il loro punto comune.

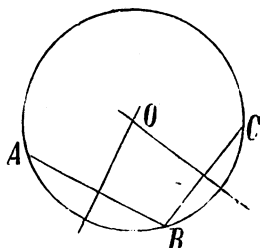


Fig. 53.

OSSERVAZIONE. Trovato il centro della circonferenza (O) è determinato anche il raggio (OA). Ciò prova che una circonferenza è determinata in grandezza e posizione da tre punti. In altre parole, quando due circonferenze hanno tre punti comuni, hanno lo stesso centro e lo stesso raggio, e perciò coincidono.

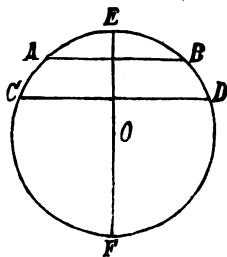


Fig. 54.

139. TEOREMA. *In un cerchio corde parallele intercettano archi eguali.*

Nel cerchio O (fig. 54) siano AB e CD due corde parallele. Condotta il diametro EF , perpendicolare alle corde,

si ha $\widehat{CE} = \widehat{DE}$, $\widehat{AE} = \widehat{BE}$,

da cui $\widehat{CE} - \widehat{AE} = \widehat{DE} - \widehat{BE}$

ossia $\widehat{AC} = \widehat{BD}$.

140. 1.° TEOREMA. *In uno stesso cerchio od in cerchi uguali,*

1.° *corde eguali hanno eguale distanza dal centro;*

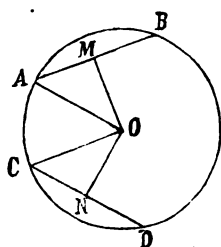


Fig. 55.

CNO (n. 126, Cor. 2.° e n. 137).

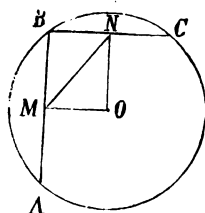


Fig. 56.

2.° *corde diseguali non hanno eguale distanza dal centro e precisamente la maggiore ha distanza minore.*

1.° Nel cerchio O (fig. 55) se le corde AB, CD sono eguali, le loro distanze dal centro OM, ON sono eguali; il che si deduce dall'eguaglianza dei triangoli AMO,

2.° Nel cerchio O poi (fig. 56) se le corde AB, BC sono diseguali ed è $AB > BC$, è pure $MB > NB$, e nel triangolo MBN si ha $\widehat{MNB} > \widehat{NMB}$ (n. 100, 2.° Teor.); perciò $\widehat{MNO} < \widehat{NMO}$ (n. 71, 6.°); allora nel triangolo MON si avrà $OM < ON$.

COROLLARIO. *In un cerchio il luogo dei punti medi delle corde eguali fra loro è una circonferenza concentrica alla data, che ha per raggio la distanza di queste corde dal centro.*

2.° Reciprocamente:

TEOREMA. *In uno stesso cerchio od in cerchi eguali,*

1.° *corde equidistanti dal centro sono eguali;*

2.° *corde non equidistanti dal centro non sono eguali e precisamente è minore quella che ha distanza maggiore.*

Si dimostra per assurdo.

OSSERVAZIONE. Di tutte le corde, che passano per un punto interno ad una circonferenza, la massima è il diametro che passa per quel punto (evidente),

la minima è la perpendicolare al diametro stesso, ossia quella che è dimezzata in quel punto. Infatti questa corda avrà fra le altre la distanza massima, che è la distanza di quel punto, dal centro.

141. La parte di cerchio compresa fra un arco e la sua corda, nonchè quella compresa fra due corde parallele, diconsi *segmenti circolari*. Le corde sono le *basi* dei segmenti: si hanno perciò segmenti ad una base ed a due basi. Il segmento che unisce il punto medio della base al punto medio dell'arco o dell'altra base dicesi *altezza*, *saetta* o *freccia* del segmento circolare.

Il segmento a due basi si può considerare come la differenza tra due segmenti ad una base.

§ 3.º Posizioni relative di una retta e di una circonferenza, e di due circonferenze.

142. 1.º TEOREMA. *Una retta ed una circonferenza possono avere in comune o nessun punto, od un punto o due punti.*

Infatti data una circonferenza O e condotto un raggio:

1.º se si conduce la perpendicolare AB al raggio da un punto C del prolungamento di

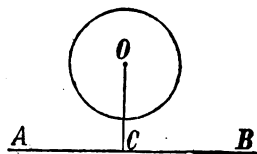


Fig. 57.

questo (esterno alla circonferenza) (fig. 57), è chiaro che la AB non ha alcun punto comune colla circonferenza, perchè ogni segmento condotto da O alla AB è maggiore di OC (n. 126, 1.º) e perciò anche del raggio.

2.º se si conduce la perpendicolare dall'estre-

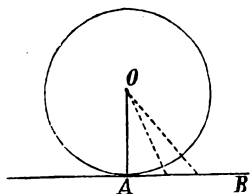


Fig. 58.

mo A del raggio (fig. 58), la retta ha comune colla circonferenza il solo punto A, perchè ogni segmento condotto da O alla retta è maggiore del raggio OA.

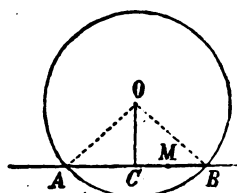


Fig. 59.

3.° se infine si conduce la perpendicolare da un punto C del raggio (interno alla circ.) (fig. 59), essa incontra la circonferenza in due punti A, B situati da bande opposte del punto C (ed equidistanti da C). La AB poi non può avere altri punti comuni colla circonferenza, perchè da O non si possono condurre più di due segmenti eguali ad OA ed OB (n. 126, Cor. 1.°).

Il primo caso si verifica quando la distanza della retta dal centro della circonferenza è maggiore del raggio, e la retta si dice esterna.

Il secondo, se la detta distanza è eguale al raggio e la retta si dice tangente alla circonferenza nel punto A (punto di contatto). (fig. 58).

Il terzo, se la detta distanza è minore del raggio e la retta si dice secante la circonferenza nei punti A e B (fig. 59).

2.° Non vi sono altri casi possibili, perciò reciprocamente

TEOREMA. *Secondo che una retta non ha punti comuni con una circonferenza, oppure ne ha uno solo comune, oppure due, la sua distanza dal centro è maggiore, eguale o minore del raggio.*

Si dimostra per assurdo.

OSSERVAZIONE. Da quanto precede risulta:

1.^o *Che tre punti d'una circonferenza per quanto vicini non sono in linea retta.*

2.^o *Che per un punto d'una circonferenza si può condurre una tangente ed una sola.*

Le posizioni relative di due circonferenze dipendono dalla grandezza relativa dei loro raggi e della distanza dei loro centri.

143. TEOREMA. *Due circonferenze possono non avere alcun punto comune.*

1.^o Sia data una circonferenza O (fig. 60): si conduca un raggio OA e sul suo prolungamento si prenda un punto O' ; col centro O' e raggio $O'B < O'A$ si descriva una circonferenza: dico che questa non ha alcun punto comune colla prima.

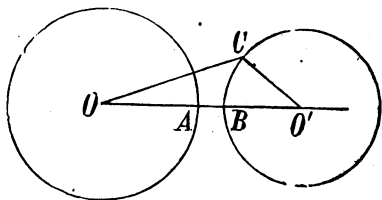


Fig. 60.

Infatti il punto B è esterno alla circonferenza O per essere $OB > OA$. Preso ora un punto qualunque C sulla circonferenza O' , lo si unisca con O' e con O : dal triangolo OCO' si ha

$$OC > OO' - O'C$$

(n. 102, Cor.), ossia $OC > OB$ e poichè $OB > OA$, anche $OC > OA$; cioè il punto C è esterno alla circonferenza O . Similmente si prova che i punti della circonferenza O sono esterni all'altra.

Le due circonferenze si dicono *esterne* l'una all'altra e non hanno punti comuni. Dalla costruzione risulta che

$$OO' > OA + O'B$$

perciò:

Se due circonferenze sono tali che la distanza dei loro centri è maggiore della somma dei raggi, le due circonferenze sono esterne l'una all'altra e non hanno punti comuni.

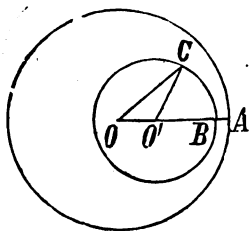


Fig. 61.

2.º Data ancora una circonferenza O (fig. 61) si conduca un raggio OA e si prenda su questo un punto O'; col centro O' e raggio O'B < O'A

si descriva una circonferenza: dico che questa non ha punti comuni colla prima.

Infatti il punto B è interno alla circonferenza O, perchè $OB < OA$. Preso ora un punto C sulla circonferenza O', lo si unisca con O e con O'; dal triangolo OCO' si ha:

$$OC < O'O + O'C,$$

ossia $OC < OB$, ma $OB < OA$, perciò $OC < OA$; cioè il punto C è interno alla circonferenza O.

La circonferenza O' si dice *interna* alla circonferenza O e non ha con essa punti comuni. Dalla costruzione risulta che

$$OO' < OA - O'B$$

perciò:

Se due circonferenze sono tali che la distanza dei loro centri è minore della differenza dei raggi, le due circonferenze sono una interna all'altra e non hanno punti comuni.

144. TEOREMA. Due circonferenze possono avere un solo punto comune.

1.º Sia una circonferenza O (fig. 62): si conduca un raggio OA e sul prolungamento si prenda

un punto O' : col centro O' e col raggio $O'A$ si descriva una circonferenza; dico che questa è esterna alla prima ed ha comune con essa il solo punto A .

Infatti il punto A è comune alle due circonferenze per costruzione.

Preso ora un punto C sulla circonferenza O' ; lo si unisca con O e con O' ; dal triangolo OCO' si ha

$$OC > OO' - O'C, \text{ ossia } OC > OA$$

cioè il punto C è esterno alla circonferenza O . Similmente si prova che i punti della circonferenza O sono esterni alla circonferenza O' .

Le due circonferenze si dicono *tangenti esternamente*.

Dalla costruzione risulta che

$$OO' = OA + O'A$$

perciò:

Se due circonferenze sono tali che la distanza dei loro centri è eguale alla somma dei raggi, le circonferenze hanno uno ed un solo punto comune situato sulla retta che passa pei centri, e sono esterne l'una all'altra.

2.º Sia ancora una circonferenza O (fig. 63): si conduca un raggio OA e su questo si prenda un punto O' ; col centro O' e raggio $O'A$ si descriva una circonferenza: dico che questa è interna alla prima ed ha in comune con essa il solo punto A .

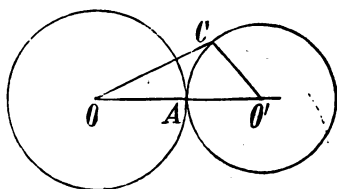
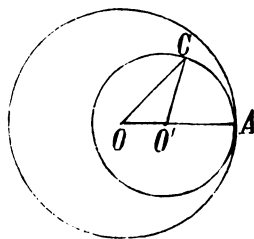


Fig. 62.



F'g. 63.

Infatti il punto A è comune alle due circonferenze per costruzione. Preso ora un punto C sulla circonferenza O', lo si unisca con O e con O'; dal triangolo OCO' si ha:

$$OC < OO' + O'C, \text{ ossia } OC < OA$$

cioè il punto C è interno alla circonferenza O.

Le due circonferenze si dicono *tangenti internamente*.

Dalla costruzione risulta che

$$OO' = OA - O'A$$

perciò:

Se due circonferenze sono tali che la distanza dei centri è eguale alla differenza dei raggi, le circonferenze hanno uno ed un solo punto comune situato sulla retta che passa pei centri, e l'una è interna all'altra.

Quando due circonferenze sono tangenti l'una all'altra, il punto comune si dice *punto di contatto*; ed in questo punto hanno la stessa tangente, la quale nel primo caso le lascia da bande opposte, nel secondo dalla stessa banda.

145. TEOREMA. *Due circonferenze possono avere due punti comuni e non più di due.*

Se nella circonferenza O (fig. 64) si traccia un raggio OC e preso un punto M sul raggio OC (interno alla circonferenza O) e un punto N sul suo prolungamento (esterno alla circonferenza O), sopra MN come diametro si descriva la

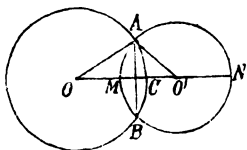


Fig. 64.

circonferenza O', questa incontrerà la circonferenza O in due punti A, B situati da bande opposte della

OO' ⁽¹⁾. I punti comuni non possono essere più di due, perchè si è già osservato al n. 138 (Probl. 2.º Osserv.) che due circonferenze che hanno tre punti comuni coincidono.

Le due circonferenze si dicono *seganti* l'una l'altra nei punti A, B. Se si unisce il punto A con O e con O', dal triangolo OAO' si ha che

$$OA + O'A > OO' > OA - O'A$$

perciò:

Se due circonferenze sono tali che la distanza dei centri è minore della somma dei raggi e maggiore della loro differenza, le due circonferenze hanno due punti comuni, nei quali s'intersecano, e ciascuna ha una parte interna all'altra ed una parte esterna.

146. TEOREMA. *La corda (AB) comune a due circonferenze che si segano è divisa in due parti eguali e ad angolo retto dalla retta dei centri.*

Infatti O ed O' (fig. 64) sono equidistanti dai punti A e B, perciò la OO' è il luogo dei punti equidistanti dai punti A e B (n. 130), e come tale, dimezza ad angolo retto il segmento AB.

147. Non vi sono altri casi possibili, perciò reciprocamente.

TEOREMA. 1.º *Quando due circonferenze non hanno punti comuni,*

a) se sono esterne l'una all'altra, la distanza dei centri è maggiore della somma dei raggi;

(1) Un punto comune alle due circonferenze non può essere sulla retta dei centri, altrimenti la distanza dei centri sarebbe eguale alla somma o alla differenza dei raggi e la circonferenza dei punti M, N dovrebbe avere i suoi punti o tutti esterni o tutti interni all'altra (salvo il punto comune); il che è contro l'ipotesi.

b) se una è interna all'altra la detta distanza è minore della differenza dei raggi.

2.° Quando due circonferenze hanno un punto comune,

a) se sono esterne l'una all'altra, la distanza dei centri è eguale alla somma dei raggi;

b) se una è interna all'altra, la detta distanza è eguale alla differenza dei raggi.

Il punto comune sta sulla retta dei centri.

3.° Quando due circonferenze hanno due punti comuni, la distanza dei centri è minore della somma dei raggi e maggiore della differenza.

Si dimostra direttamente oppure per assurdo.

§ 4.° Angoli al cerchio.

148. Un angolo si dice *al cerchio* (alla circonferenza), quando il vertice trovasi sulla circonferenza; i lati in generale sono secanti la circonferenza, ma possono anche essere tangenti. L'angolo al cerchio si dice che *insiste* sull'arco compreso da' suoi lati, ed è *inscritto* nell'arco rimanente.

Così l'angolo $\widehat{BAC}$ (fig. 65) al cerchio insiste sull'arco $\widehat{BC}$, ed è inscritto nell'arco $\widehat{BAC}$.

149. TEOREMA. *L'angolo al cerchio è la metà dell'angolo al centro, che comprende il medesimo arco.*

Possono darsi tre casi: 1.° che un lato dell'angolo passi pel centro; 2.° che il centro sia interno all'angolo; 3.° che sia esterno.

1.° CASO. Nella circonferenza O (fig. 65) il lato AD dell'angolo al cerchio $\widehat{CAD}$ passi pel centro: congiunto O con C , si ha (n. 96 Cor.)

$$\widehat{COD} = \widehat{CAD} + \widehat{ACO};$$

ma $\widehat{ACO} = \widehat{CAD}$, perciò $\widehat{COD} = 2\widehat{CAD}$, da cui:

$$\widehat{CAD} = \frac{1}{2} \widehat{COD}.$$

Se l'altro lato è tangente, come AC' , si ha che $\widehat{DAC'}$ è retto (n. 142, Teor. 1.°, caso 2.°), e perciò metà dell'angolo piatto $\widehat{AOD}$ che comprende lo stesso arco $\widehat{AD}$.

2.° CASO. Sia il centro O interno all'angolo $\widehat{BAC}$: condotto il diametro BD , pel 1.° caso si ha:

$$\widehat{BAD} = \frac{1}{2} \widehat{BOD}, \text{ e } \widehat{DAC} = \frac{1}{2} \widehat{DOC}$$

e addizionando

$$\widehat{BAD} + \widehat{DAC} = \frac{1}{2} \widehat{BOD} + \frac{1}{2} \widehat{DOC}$$

$$\text{ossia } \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \widehat{BOC}.$$

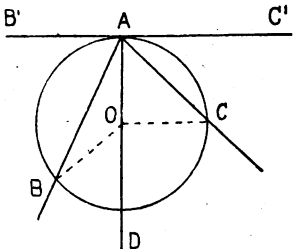


Fig. 65.

Lo stesso ragionamento vale se un lato dell'angolo è tangente, come per l'angolo $\widehat{BAC'}$, perchè $\widehat{DAC'} = \frac{1}{2} \widehat{DOA}$ (a destra).

Lo stesso vale anche se entrambi i lati sono tangenti, come per l'angolo $\widehat{B'AC'}$. Infatti

$$\widehat{DAB'} = \frac{1}{2} \widehat{DOA} \text{ (a sinistra),}$$

$$\widehat{DAC'} = \frac{1}{2} \widehat{DOA} \text{ (a destra)}$$

addizionando

$$\widehat{B'AC'} = \frac{1}{2} \text{ giro.}$$

3. CASO. Sia il centro O esterno all'angolo $\widehat{BAC}$ (fig. 66); condotto il diametro AD si ha:

$$\widehat{DAC} = \frac{1}{2} \widehat{DOC} \text{ e } \widehat{DAB} = \frac{1}{2} \widehat{DOB}$$

e sottraendo membro a membro

$$\widehat{DAC} - \widehat{DAB} = \frac{1}{2} \widehat{DOC} - \frac{1}{2} \widehat{DOB}$$

$$\text{ossia } \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \widehat{BOC}.$$

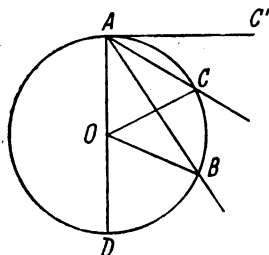


Fig. 66.

Se un lato dell'angolo è tangente, come per l'angolo $\widehat{BAC'}$, vale la stessa dimostrazione:

$$\widehat{DAC'} = \frac{1}{2} \widehat{DOA} \text{ (a destra), } \widehat{DAB} = \frac{1}{2} \widehat{DOB}$$

$$\text{da cui } \widehat{DAC'} - \widehat{DAB} = \frac{1}{2} \widehat{DOA} - \frac{1}{2} \widehat{DOB}$$

$$\text{ossia } \widehat{BAC'} = \frac{1}{2} \widehat{BOA}.$$

COROLLARIO 1.º *Gli angoli al cerchio che insistono sullo stesso arco (o iscritti nello stesso arco) sono uguali. L'arco in cui sono iscritti gli angoli si dice capace di uno di questi angoli. Così l'arco $\widehat{CAD}$ è capace dell'angolo $\widehat{CAD}$.*

COROLLARIO 2.º *Un angolo al cerchio è convesso, e precisamente è acuto, retto od ottuso, secondo che l'arco compreso è minore, uguale o maggiore della semicirconferenza.*

§ 5.º Alcuni problemi.

150. Al n. 21 si è detto che una figura è determinata in modo unico, quando siano dati alcuni de' suoi elementi (e le loro posizioni relative). Le proprietà della figura, cioè le mutue relazioni dei

suoi elementi, permettono di trovare anche gli altri elementi, ossia di *costruire la figura*. In ciò consiste *risolvere un problema*.

151. La costruzione di una figura si riduce alla opportuna ripetizione delle due costruzioni fondamentali della retta e della circonferenza di cui ai nn. 34 e 60.

Si è già avuto qualche esempio ai nn. 113, 114 e 115.

152. Talvolta avviene che la costruzione dia luogo a più figure, ma in numero finito, e differenti tra loro (di grandezza o di posizione), allora la figura è semplicemente *determinata*, ed il problema si dice che ha *più soluzioni*. Per es. il problema: *da un punto condurre la perpendicolare ad una retta data* (n. 113) ha una sola soluzione; mentre l'altro: *da un punto condurre una retta che faccia con una retta data un angolo dato*; ha due soluzioni, come vedesi nella fig. 33, perchè tanto la AB quanto la AC condotte da A formano angoli uguali colla BC.

E qui occorre fare una distinzione. Se la figura richiesta deve avere certi elementi eguali ad elementi dati, si hanno una o più soluzioni, secondo che vi sono una o più figure *differenti* fra loro, che soddisfano alle condizioni date. Ma se la figura è richiesta anche di *posizione* (cioè è fissata la posizione di qualche elemento), allora le soluzioni sono tante quante sono le figure che soddisfanno alle date condizioni, anche se eguali fra loro; perchè diversa è la loro posizione.

Ad es. se si volesse un triangolo coi lati eguali a tre segmenti dati, di siffatti triangoli, se ve n'ha

uno, ve ne sono quanti se ne vuole; ma la soluzione è *unica*, perchè questi triangoli, essendo eguali (n. 107, 1.^o), si possono ridurre a coincidere. Ma se fosse fissata la posizione di un lato, le soluzioni sono più d'una, sebbene eguali, perchè su quel lato *fissato di posizione* e cogli altri due lati si può costruire più di un triangolo.

Le risoluzioni dei problemi che seguono, quali applicazioni di ciò che si è trattato fino a questo punto, metteranno meglio in chiaro questa distinzione.

a) ***Sulle rette e sugli angoli.***

153. PROBLEMA. *Dati un lato ed il vertice costruire un angolo eguale ad un angolo dato.*

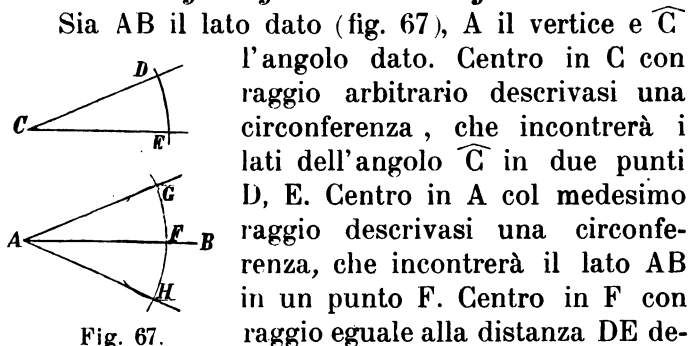


Fig. 67.

Descrivasi una circonferenza, che incontrerà la circonferenza A in due punti G, H : congiungasi G (od H) con A , e l'angolo GAB (o l'angolo HAB) è l'angolo richiesto.

Il problema è sempre possibile ed ha due soluzioni.

OSSERVAZIONE. Questo problema insegna a costruire la somma di più angoli.

154. PROBLEMA. *Da un punto dato condurre la parallela ad una retta data.*

Sia A il punto dato (fig. 68) e BC la retta data.

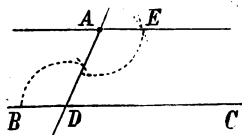


Fig. 68.

Si unisca A con un punto qualunque D della BC. Indi col vertice A e col lato AD si costruisca un angolo eguale ad $\widehat{ADB}$, ma dall'altra banda della AD e sia $\widehat{DAE}$. La AE è la parallela richies'a ed è unica.

155. PROBLEMA. *Dividere un segmento in un dato numero di parti eguali.*

Sia AB (fig. 69) il segmento da dividersi per

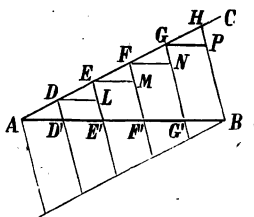


Fig. 69.

es. in cinque parti eguali. Si costruisca in A un angolo acuto qualunque $\widehat{CAB}$; di poi sul lato AC ed a partire da A si portino consecutivamente cinque segmenti AD, DE, EF, FG, GH eguali tra loro. Si congiunga H con B; le parallele ad HB

condotte dai punti D, E, F, G ad incontrare AB nei punti D', E', F', G', dividono il segmento AB in cinque parti eguali.

Infatti condotte dai punti D, E, F, G le parallele ad AB, come è indicato nella figura, i triangoli $AD'D$, DLE GPH sono eguali per avere eguali i lati AD, DE,... GH non che gli angoli adiacenti a questi lati. Perciò $AD' = DL = \dots = GP$. Ma $DL = D'E'$ $GP = G'B$, perchè lati opposti di parallelogrammi, dunque:

$$AD' = D'E' = \dots = G'B.$$

OSSERVAZIONE 1.^a La costruzione riesce più spedita operando nel modo seguente: si conducano da A e da B due raggi in direzioni opposte tra loro (fig. 69): si prendano su ciascuno di questi a partire rispettivamente da A e da B, cinque segmenti tutti eguali tra loro e si uniscano i punti di divisione com'è indicato nella figura; queste congiungenti dividono il segmento AB in cinque parti eguali perchè sono parallele tra loro (n. 119).

OSSERVAZIONE 2.^a Si può domandare se è possibile dividere anche un angolo, un arco od un settore in un numero qualunque di parti eguali. Rispondiamo che no, salvo per certi angoli, archi o settori particolari da dividersi in uno speciale numero di parti eguali. Così ad es. essendo l'angolo del triangolo equilatero eguale a $\frac{2}{3}\widehat{R}$, la costruzione di questo triangolo fornisce il modo di dividere un angolo retto in tre parti eguali: il che lasciamo per esercizio allo studioso.

b) *Sul triangoli.*

156. PROBLEMA. *Costruire un triangolo, che abbia un lato eguale ad un segmento dato e due angoli eguali a due angoli dati o, come si usa dire per brevità, costruire un triangolo dati un lato e due angoli.*

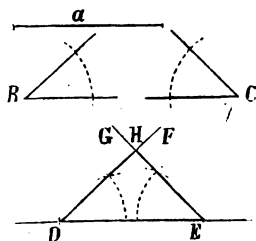


Fig. 70.

Siano a il segmento (fig. 70) e $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ gli angoli dati. Distingueremo due casi:

1.º gli angoli dati devono essere adiacenti al lato dato:

2.º uno degli angoli dati deve essere opposto al lato dato.

Nel 1.º caso preso sopra una retta un segmento $DE = a$ (fig. 70), si faccia in D e col lato DE l'angolo $\widehat{FDE} = \widehat{B}$ ed in E col lato ED l'angolo $\widehat{GED} = \widehat{C}$ dalla stessa banda del primo: posto che DF ed EG s'incontrino in H, il triangolo HDE è il domandato, com'è evidente.

Nel 2.º caso si costruisca la somma dei due angoli dati, facendo $\widehat{EDF} = \widehat{B}$ e $\widehat{FDG} = \widehat{C}$ (fig. 71) e si prolunghi ED in M. L'angolo $\widehat{GDM}$ è eguale al terzo angolo del triangolo e perciò all'altro angolo adiacente al lato dato: così si è ridotti al primo caso.

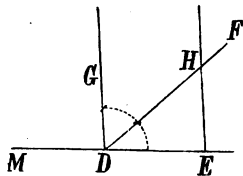


Fig. 71.

Perciò fatto $DE = a$, si costruisca in E l'angolo $\widehat{DEH} = \widehat{GDM}$; il triangolo DEH è il domandato.

Il problema ha una soluzione, ed è possibile se la somma degli angoli dati è minore di $2\widehat{R}$.

157. PROBLEMA. *Costruire un triangolo dati due lati e l'angolo compreso.*

Sieno a, b i lati e $\widehat{C}$ l'angolo dato (fig. 72). Fatto un angolo $\widehat{DAB} = \widehat{C}$, si prendano sui suoi lati $AB = a$, $AD = b$, si unisca D con B; DAB è il triangolo richiesto.

Il problema è sempre possibile ed ha una soluzione.

158. PROBLEMA. *Costruire un triangolo dati i tre lati.*

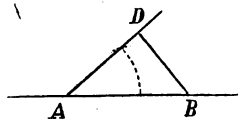
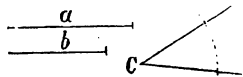


Fig. 72.

Sieno a, b, c (fig. 73) i tre lati. Si prenda un segmento $BC = a$; centro in B e raggio c si descriva una circonferenza; centro in C e raggio b si descriva una seconda circonferenza. Posto che le circonferenze s'incontrino, sia A uno dei punti d'intersezione: si unisca A con B e con C, ed ABC è il triangolo richiesto.

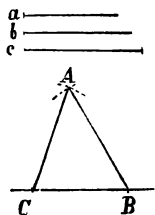


Fig. 73.

È chiaro che l'altro punto d'intersezione delle due circonferenze darebbe un triangolo eguale ad ABC.

Il problema ha una soluzione, ed è possibile se uno dei lati (distanza dei centri delle due circonferenze) è minore della somma e maggiore della differenza degli altri due (raggi delle circonferenze) (n. 145).

Merita speciale attenzione, per la discussione a cui dà luogo, il seguente:

159. PROBLEMA. *Costruire un triangolo dati due lati e l'angolo opposto ad uno di essi.*

Sieno a e b i due lati dati ed $\widehat{A}$ l'angolo dato (fig. 74) che dev'essere opposto al lato a . Si costruisca un angolo $\widehat{EDF} = \widehat{A}$ e sopra uno dei lati si prenda $DE = b$. Centro in E e raggio eguale ad a si descriva una circonferenza, la quale supponiamo intersechi l'altro lato DF in un punto F; congiungasi E con F ed il triangolo EDF è il richiesto.

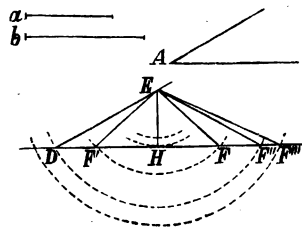


Fig. 74.

Per la discussione converrà distinguere alcuni casi. Suppongasi prima che l'angolo $\widehat{A}$ sia acuto. Se da E si cala la EH perpendicolare a

DF, (che è determinata dal lato b e dall'angolo $\widehat{A}$) è chiaro intanto che, se $a < EH$, il problema non ha soluzione, poichè in tal caso la circonferenza di centro E e raggio a non ha punti comuni col lato DF : se $a = EH$, la circonferenza è tangente in H a DF , ed il solo triangolo DEH è soluzione del problema: se $a > EH$, conviene ancora distinguere

secondo che $a \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} b$, Se $a < b$, la circonferenza.

E interseca il lato DF in due punti F, F' ed i due triangoli EDF, EDF' sono soluzioni del problema: se $a = b$, la circonferenza interseca il lato DF nel punto D ed in un altro punto F'' , ed il solo triangolo EDF'' è soluzione del problema: se $a > b$, la circonferenza interseca la DF in due punti, di cui uno F''' sul lato DF e l'altro sul prolungamento, ed il solo triangolo EDF''' è soluzione del problema.

Suppongasi ora l'angolo $\widehat{A}$ retto ed ottuso

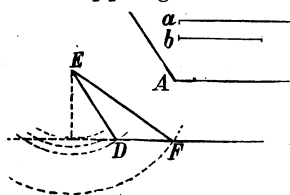


Fig. 75.

(fig. 75). Se $a \leq b$, il problema non ha soluzioni, perchè i punti comuni alla circonferenza E ed alla DF (se ve ne sono) si trovano sul prolungamento del lato DF ; se infine $a > b$, la circonferenza

interseca la DF in due punti, di cui l'uno F sul lato DF e l'altro sul prolungamento, e il solo triangolo EDF è soluzione del problema. Riassumendo:

$$\widehat{A} \text{ acuto } \left\{ \begin{array}{l} a < b \left\{ \begin{array}{l} a < EH \dots \text{nessuna soluz.} \\ a = EH \dots \text{una soluzione} \\ a > EH \dots \text{due soluzioni} \end{array} \right. \\ a = b \dots \dots \dots \text{una soluzione} \\ a > b \dots \dots \dots \text{una soluzione} \end{array} \right.$$

$$\widehat{A} \text{ retto od ottuso } \begin{cases} a < b \\ a = b \\ a > b \end{cases} \begin{cases} \text{nessuna soluzione} \\ \text{una soluzione} \end{cases}$$

c) **Sui quadrilateri.**

160. PROBLEMA. *Costruire un parallelogrammo dati due lati e l'angolo compreso.*

Sieno a, b i lati dati ed $\widehat{M}$ l'angolo dato (fig. 76). Si costruisca l'angolo $\widehat{BAC} = \widehat{M}$ e sui suoi lati si prendano $AB = a, AC = b$; di poi col centro successivamente in B ed in C e raggi b ed a , si descrivano due circonferenze, che s'incontreranno in due punti (n. 145, Teor.), dei quali uno situato dalla banda opposta di A rispetto alla BC e sia D ; si unisca D con B e con C e il quadrilatero $ABDC$ è il pllgr. richiesto (n. 118, 2.º Teor.).

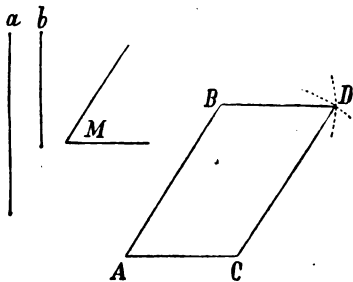


Fig. 76.

Questo problema comprende come casi particolari i seguenti:

a) *Costruire un rettangolo, dati due lati consecutivi.*

b) *Costruire un rombo, dati un lato ed un angolo.*

c) *Costruire un quadrato, dato un lato.*

161. PROBLEMA. *Costruire un trapezio dati*

1.º *i quattro lati:*

2.º *le due basi e le diagonali.*

1.º Sieno a, b, c, d (fig. 77) i quattro lati e precisamente sieno a, b le due basi.

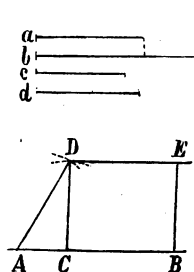


Fig. 77.

Sopra una retta si prenda $AB = b$ (base maggiore) e sopra AB a partire da B il segmento $BC = a$ (base minore). Di poi coi tre lati c , d ed $AC = a - b$ si costruisca (probl. 158) il triangolo ACD , ed infine si completi il pllgr. $BCDE$ (n. 160): il trapezio cercato è $ABED$. La dimostrazione allo studioso.

Il problema ha una soluzione ed è possibile, se è possibile costruire il triangolo ACD , ossia se la differenza (AC) delle basi è minore della somma e maggiore della differenza degli altri due lati.

2.° Sieno a , b le basi e c , d le diagonali. Sopra

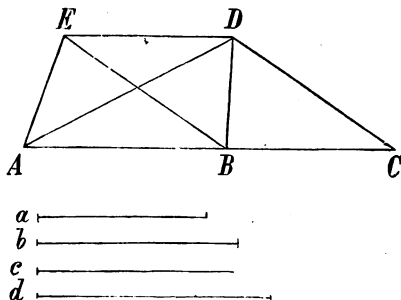


Fig. 78.

una retta si prenda $AB = a$ (fig. 78) e di seguito $BC = b$. Di poi coi tre lati c , d e $AC = a + b$ si costruisca il triangolo ACD : si completi il pllgr. $BCDE$, si unisca A con E; il trapezio cercato è $ABDE$.

La dimostrazione allo studioso.

Il problema ha una soluzione, ed è possibile, se è possibile costruire il triangolo ACD , ossia se

$$c + d > a + b > c - d.$$

d) **Sul cerchio.**

162. PROBLEMA. *Da un punto dato condurre una tangente ad una circonferenza data.*

Il punto dato può essere sulla circonferenza o

esterno ad essa. Nel primo caso la questione si riduce a condurre per quel punto la perpendicolare al raggio del punto stesso (n. 113). La soluzione è unica ed è sempre possibile.

Nel 2.^o caso sia O la circonferenza ed A il punto dato (fig. 79): sopra OA come diametro si descriva una circonferenza, che incontrerà la prima in due punti C, D . La AC e la AD sono tangenti alla circonferenza O per essere retti gli angoli $\widehat{ACO}$, $\widehat{ADO}$ (n. 148, Cor. 2.^o).

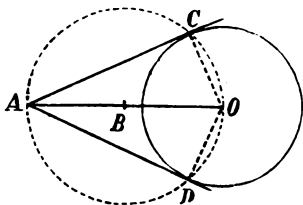


Fig. 79.

Il problema è sempre possibile ed ha due soluzioni.

COROLLARIO. *Le tangenti condotte da un punto esterno ad una circonferenza sono eguali.*

Nella fig. 79 $AC = AD$. Védasi n. 126. Cor, 2.^o del Teor. 2.^o

ALTRE COSTRUZIONI. 1.^a Si unisca A con O e dal punto d'incontro di AO colla circonferenza O si conduca la perpendicolare ad AO . Centro O e raggio OA si descriva una circonferenza ad incontrare la perpendicolare anzidetta in due punti. Le rette che uniscono questi punti con O incontrano la circonferenza data nei due punti C e D .

2.^a Centro A e raggio AO descrivasi una circonferenza. Centro O e raggio il diametro della circ. O si descriva una seconda circonferenza che intersecherà la precedente in due punti. Le rette che uniscono questi punti con O incontrano la circonferenza data nei due punti C, D . La dimostrazione allo studioso.

163. PROBLEMA. *Condurre una tangente ad una circonferenza data, che sia parallela ad una retta data.*

Sia C la circonferenza data (fig. 80) ed AB la retta data. Si conduca dal centro C la perpendicolare alla AB , la quale incontri la circonferenza in D ed in E . Le tangenti in D ed in E alla circonferenza sono parallele alla AB (n. 81).

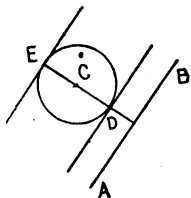


Fig. 80.

164. PROBLEMA. *Descrivere un arco capace di un angolo dato e che abbia per estremi due punti dati.*

Sieno A, B i punti dati e $\widehat{C}$ l'angolo dato (fig. 81). Si unisca A con B e si conduca la MO perpendicolare alla AB nel punto medio M . Col vertice in A e col lato AB si faccia l'angolo $\widehat{BAT} = \widehat{C}$ (n. 153). Si conduca da A la perpendicolare alla AT ad incontrare in O la MO . Centro O e raggio OA si descriva la circonferenza che passa necessariamente per B (n. 130). L'arco $\widehat{AB}$ esterno all'angolo $\widehat{BAT}$ è l'arco cercato.

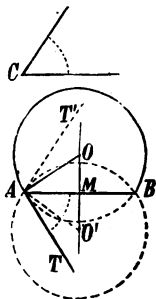


Fig. 81.

Infatti un angolo iscritto in quest'arco è eguale ad $\frac{1}{2} \widehat{AOB}$ (n. 149); e poichè AT è tangente in A alla circonferenza, per essere perpendicolare ad OA in A , anche $\widehat{BAT} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$ (n. 149), dunque un angolo iscritto nel detto arco è eguale a $\widehat{BAT}$, e perciò anche all'angolo dato $\widehat{C}$.

Il problema è sempre possibile (quando $\widehat{C}$ sia convesso) ed ha due soluzioni.

Infatti nel punto A si possono fare due angoli $\widehat{BAT}$, $\widehat{BAT'}$ eguali a C da bande opposte della AB, e perciò si hanno due archi eguali da bande opposte della AB, che soddisfanno il problema.

COROLLARIO. *Gli archi che coi due primi completano le due circonferenze O, O' sono capaci dell'angolo supplementare di $\widehat{C}$ (n. 149).*

TEOREMA. *Il luogo dei vertici degli angoli eguali ad un angolo dato ($\widehat{C}$), i cui lati passano per due punti fissi (A, B) è il sistema dei due archi capaci dell'angolo dato, che terminano ai punti dati.*

Infatti ogni punto dei due archi capaci dell'angolo $\widehat{C}$ (fig. 81) e che terminano ai punti A, B soddisfa alla condizione enunciata; mentre un punto interno alla figura racchiusa dai detti archi darebbe luogo ad un angolo maggiore di $\widehat{C}$, ed un punto esterno ad un angolo minore (la dimostrazione allo studioso).

OSSERVAZIONE. Se l'angolo $\widehat{C}$ è retto, il luogo è la circonferenza di diametro AB.

165. PROBLEMA. *Descrivere una circonferenza tangente ad una circonferenza data O e ad una retta data AB in un punto dato A (fig. 82).*

Il centro della circonferenza incognita trovasi intanto sulla perpendicolare in A alla AB. D'altra parte la sua distanza da O deve essere eguale alla somma (n. 145) (o alla differenza) dei raggi, e la sua

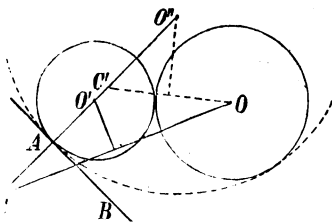


Fig. 82.

distanza da O al raggio incognito; perciò se sulla perpendicolare alla AB e dalla banda opposta (o dalla stessa banda) della circonferenza O si prende AC (o AC') eguale al raggio della circonferenza O , il centro incognito sarà equidistante da C e da O (oppure da CO' e da), e si troverà sulla perpendicolare ad OC (o ad OC') nel punto medio. Il punto d'incontro O' (oppure O'') delle due perpendicolari ad OC e ad AB (ad OC' e ad AB) è il centro cercato. La dimostrazione e la discussione allo studioso.

e) *Alcuni luoghi.*

Daremo infine qualche esempio di ricerca di luoghi geometrici, tanto utili nella ricerca delle soluzioni dei problemi.

166. PROBLEMA. *Qual è il luogo descritto dal punto medio M del segmento AB (fig. 83) i cui estremi scorrono su due rette CA , CB perpendicolari tra loro?*

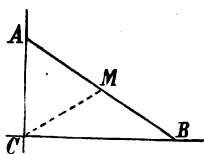


Fig. 83.

167. PROBLEMA. *Un triangolo rettangolo ABC si muove in modo che gli estremi dell'ipotenusa AB scorrano su due rette OA , OB perpendicolari tra loro; come si muove il vertice C dell'angolo retto? (figura 84).*

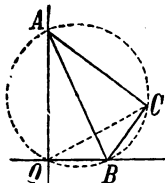


Fig. 84.

Si unisca O con C : qualunque sia la posizione del triangolo ABC , la circonferenza di diametro AB passa

per O e per C (n. 163, Oss.), perciò $\widehat{BOC} = \widehat{BAC}$; ma $\widehat{BAC}$ e quindi anche $\widehat{BOC}$ non variano, dunque il punto C si muove sulla retta OC.

168. PROBLEMA. *Trovare il luogo del terzo vertice di un triangolo, dati due vertici A, B (fig. 85) ed una mediana (¹).*

Non consideriamo il caso che la mediana data cada sul lato dato AB, perchè allora è evidente qual è il luogo descritto dal terzo vertice.

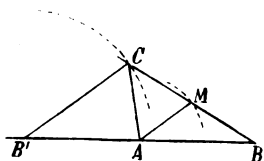


Fig. 85.

Supponiamo che la mediana parta dal vertice A, e sia AM una sua posizione qualunque. Si conduca BM e prendasi sul prolungamento $MC = MB$: sarà C il terzo vertice. Sul prolungamento di BA prendasi $AB' = AB$ e si unisca C con B'; sarà $CB' = 2AM$ e parallelo ad AM (n. 132. Cor.); ma AM e quindi anche CB' non variano; i punti A e B' sono fissi; dunque intanto che il punto M (estremo della mediana data) descrive la circonferenza di centro A e raggio AM, il terzo vertice C descrive la circonferenza di centro B' e raggio $B'C = 2AM$.

§ 6.º Poligoni iscritti e circoscritti.

169. Sopra una circonferenza si prendano successivamente dei punti A, B, C, D, E (figure 86 e 95). Le corde AB, BC, CD.... che uniscono questi punti formano una spezzata (un poligono se la

(¹) Vedasi la nota a pag. 73.

spezzata è chiusa), che dicesi *iscritta* nella circonferenza: questa è *circoscritta* alla spezzata.

Le tangenti alla circonferenza nei punti stessi incontrandosi successivamente formano un'altra spezzata (un poligono se la spezzata è chiusa) che dicesi *circoscritta* alla circonferenza, e questa è *iscritta* nella spezzata.

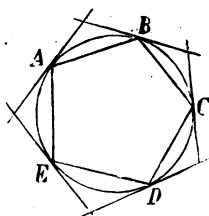


Fig. 86.

170. TEOREMA. *Ad un triangolo si può circoscrivere una circonferenza ed una sola.*

Nel triangolo ABC (fig. 87) le perpendicolari condotte dai punti medi D, E dei lati AB, BC si devono incontrare in un punto O. Poichè il punto O trovasi sulla DO, si ha $OA = OB$ (n. 130), e poichè il punto O trovasi anche sulla EO, si ha $OB = OC$; dunque il punto O è equidistante dai tre punti A, B, C, ed è unico; in altre parole, la circonferenza di centro O e raggio OA, ed essa sola, è circoscritta al triangolo ⁽¹⁾.

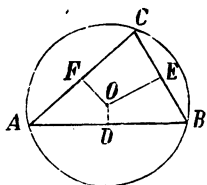


Fig. 87.

OSSERVAZIONE. 1.^a Si confronti questo teorema col problema 2.^o n. 138.

OSSERVAZIONE 2.^a Poichè $OA = OC$ la perpendicolare ad AC nel punto medio F passa per O, ossia:

In un triangolo le perpendicolari ai lati nei

(¹) Circa alla posizione del punto O si può dire che, se il triangolo è acutangolo, questo punto è interno al triangolo; se ottusangolo, il punto O è esterno; se rettangolo, il punto O è il punto medio dell'ipotenusa.

loro punti medi concorrono in un punto (centro del cerchio circoscritto) ⁽¹⁾.

171. Ad un quadrangolo non si può in generale circoscrivere una circonferenza. La condizione necessaria, perchè ciò sia possibile, è data dal seguente:

1.° TEOREMA. *In un quadrangolo iscritto gli angoli opposti sono supplementari.*

Nel quadrangolo iscritto ABCD (fig. 88) l'angolo in $\widehat{B}$ è eguale alla metà dell'angolo al centro opposto all'arco $\widehat{ADC}$, e l'angolo in $\widehat{D}$ alla metà di quello opposto all'arco $\widehat{ABC}$. Ma i due angoli al centro danno per somma $4R$, dunque $\widehat{B} + \widehat{D} = 2R$; e perciò anche $\widehat{A} + \widehat{C} = 2R$.

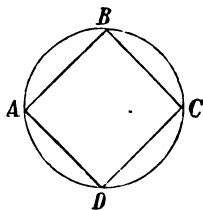


Fig. 88.

La condizione è anche sufficiente, perchè reciprocamente:

2.° TEOREMA. *Ad un quadrangolo, che ha gli angoli opposti supplementari, si può circoscrivere una circonferenza.*

Il quadrangolo ABCD (fig. 89) abbia gli angoli opposti supplementari. La circonferenza dei tre punti A, B, C non passi per D, se è possibile, ed incontri

(¹) Se si congiungono i punti D, E, F, si sa che queste congiungenti sono parallele ai lati del triangolo ABC, e perciò le OD, OE, OF prolungate opportunamente sono le *altezze* del triangolo DEF, cioè le distanze di ciascun vertice dal lato opposto. Se si considera come dato il triangolo DEF, si dimostrerà che le altezze d'un triangolo concorrono in un punto, mostrando che esse sono le perpendicolari nei punti medi ai lati del triangolo (ABC) ottenuto conducendo pei vertici del triangolo dato le parallele ai lati opposti.

la AD in un punto D'. Il quadrangolo ABCD' essendo iscritto, l'angolo $\widehat{AD'C}$ sarà supplementare dell'angolo $\widehat{B}$, ma anche $\widehat{ADC}$ è supplementare di $\widehat{B}$, perciò $\widehat{AD'C} = \widehat{ADC}$, il che è assurdo (n. 95 Cor.). Dunque la circonferenza passa per D.

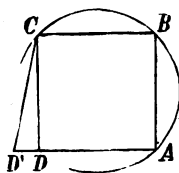


Fig. 89.

COROLLARIO. *Al quadrato, al rettangolo ed al trapezio isoscele si può circoscrivere una circonferenza.*

172. TEOREMA. *In un triangolo si può iscrivere una circonferenza ed una sola.*

Nel triangolo ABC (fig. 90) si conducano le bisettrici dei due angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$, che si dovranno incontrare in un punto O. Questo punto per essere sulla bisettrice OA è equidistante dai lati AB, AC (n. 131), e per essere sulla bisettrice OB è equidistante dai lati AB, BC, perciò è equidistante dai tre lati, ed è unico; in altre parole la circonferenza di centro O e raggio la distanza OM del punto O dal lato AB è tangente ai tre lati del triangolo, ed essa sola.

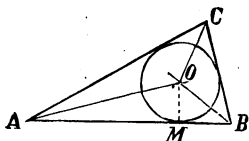


Fig. 90.

OSSERVAZIONE 1.^a Poichè il punto O è equidistante dai lati AC, CB, la bisettrice dell'angolo $\widehat{C}$ passa per O, ossia:

Le bisettrici degli angoli d'un triangolo concorrono in un punto (centro del cerchio iscritto).

OSSERVAZIONE 2.^a Se si prolungano i lati del triangolo e si conducono anche le bisettrici degli angoli esterni (fig. 91 a), queste a due a due s'incontrano in tre punti O_1, O_2, O_3 , che sono pure equidistanti dalle tre rette che formano il triangolo

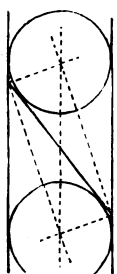
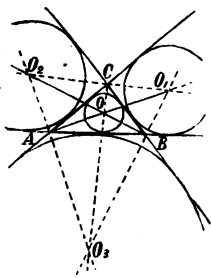


Fig. 91 a.

Fig. 91 b.

ABC, e perciò sono centri di tre circonferenze tangenti alle rette stesse. Queste circonferenze, ciascuna delle quali è tangente ad un lato del triangolo ed ai prolungamenti degli altri due, si dicono *ex-iscritte* al triangolo. I punti O_1 ,

O_2 , O_3 si trovano pure sulle bisettrici degli angoli interni, e precisamente la bisettrice di un angolo interno e le due bisettrici degli esterni non adiacenti concorrono in un punto.

Esistono dunque in tutto quattro circonferenze tangenti a tre rette che formano un triangolo; queste si riducono a due, se delle tre rette due sono parallele (fig. 91, b); e mancano affatto, se le tre rette sono parallele o concorrono in un punto.

173. In un quadrangolo non si può in generale iscrivere una circonferenza. La condizione necessaria, perchè ciò sia possibile, è data dal seguente:

1.° TEOREMA. *Se un quadrangolo è circoscritto ad una circonferenza, la somma di due lati opposti è eguale alla somma degli altri due.*

Sia ABCD (fig. 92) un quadrangolo circoscritto ed M, N, P, Q i punti di contatto.

Si sa che (numero 162 Cor.°)

$$AM = AQ \text{ e } BM = BN$$

da cui addizionando

$$AB = AQ + BN$$

analogamente:

$$CD = DQ + CN.$$

Addizionando nuovamente

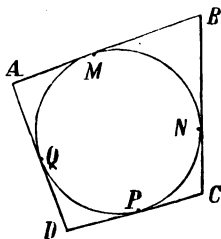


Fig. 92.

$$AB + CD = AD + AC.$$

La condizione è anche sufficiente, poichè reciprocamente:

2.^o TEOREMA. *In un quadrangolo, in cui la somma di due lati opposti è eguale alla somma degli altri due si può iscrivere una circonferenza.*

Nel quadrangolo ABCD (fig. 93) sia

$$AB + CD = AD + BC.$$

Descrivasi la circonferenza tangente ai tre lati CB, BA, AD; se CD non è tangente ad essa, sarà esterna o segante. Sia esterna se è possibile; si conduca dal centro O della circonferenza descritta la perpendicolare alla CD, la quale incontri la circonferenza in M. Da M conducasi la tangente alla circonferenza (che sarà parallela alla CD) ad incontrare in E, F rispettivamente i lati BC, AD. Il quadrilatero ABEF è circo-

scritto, perciò:

$$AF + BE = AB + EF.$$

Addizionando membro a membro questa relazione colla data, e togliendo dalle due somme eguali le parti comuni AB, BE, AF risulta

$$DC = EF + FD + EC$$

il che è assurdo (n. 103).

Alla stessa conclusione si giunge supponendo CD segante: dunque la circonferenza è tangente a CD.

COROLLARIO. *Nel rombo e nel quadrato si può iscrivere una circonferenza.*

174. Una spezzata (un poligono) è regolare, se è equiangola ed equilatera. È chiaro che si possono

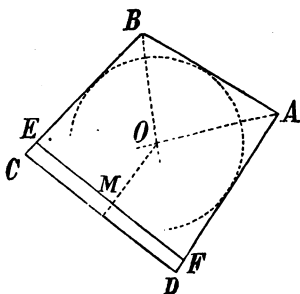


Fig. 93.

costruire spezzate regolari con quanti e quali si vogliano lati ed angoli. Di poligoni regolari abbiamo avuto due esempi nel triangolo equilatero e nel quadrato: ne vedremo altri in seguito.

175. TEOREMA. *Ad ogni spezzata (poligono) regolare convessa si può circoscrivere ed inscrivere una circonferenza.*

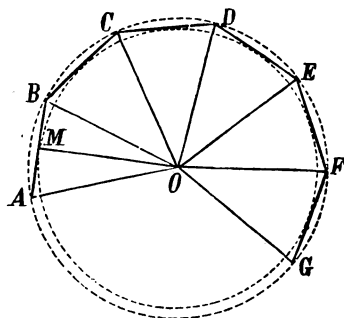


Fig. 94:

Sia ABCDEFG una spezzata regolare (fig. 94): si conducano le bisettrici di due angoli consecutivi $\widehat{B}$, $\widehat{C}$; il loro punto d'incontro è il centro tanto della circonferenza circoscritta che della inscritta. Infatti nel triangolo OBC si ha: $\widehat{OBC} = \widehat{OCB}$, da cui: $OC = OB$. Congiunto O con D i due triangoli OCD, OCB sono eguali per avere OC comune, $BC = CD$ ed $\widehat{OCB} = \widehat{OCD}$, perciò $OD = OB = OC$, ed $\widehat{ODC} = \widehat{OBC}$; e poichè $\widehat{OBC} = \frac{1}{2} \widehat{ABC}$, è pure $\widehat{ODC} = \frac{1}{2} \widehat{CDE}$. Così continuando si dimostra che le congiungenti il punto O coi vertici della spezzata sono eguali: ossia la circonferenza di centro O e raggio una di queste congiungenti è circoscritta alla spezzata.

Di più le corde AB, BC..... eguali sono equidistanti dal centro (n. 140); dunque la circonferenza di centro O e raggio la distanza OM del centro dalla corda AB è inscritta nella spezzata. I punti di contatto sono i punti medi dei lati.

176. TEOREMA. *Se sopra una circonferenza si prendono successivamente degli archi eguali, la spezzata iscritta, che ha per vertici i punti di divisione, è regolare; e la spezzata circoscritta formata dalle tangenti nei punti stessi (che ha per vertici i punti d'incontro delle successive tangenti) è pure regolare.*

Sulla circonferenza O (fig. 95) si abbiano gli archi adiacenti ed eguali $AB, BC, \dots, EF, FG$; si conducano le corde corrispondenti a formare la spezzata iscritta $ABCDEFG$ e le tangenti nei punti di divisione, che incontrandosi successivamente formino la spezzata circoscritta $MNPQRS$. Dico che le due spezzate sono regolari.

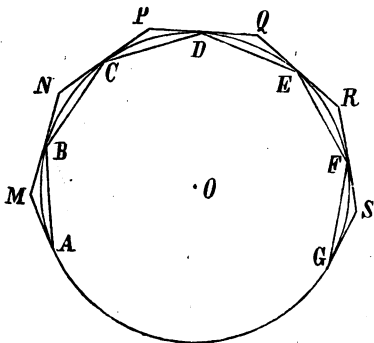


Fig. 95.

Infatti le corde $AB, BC, \dots$ sono eguali, perchè corrispondono ad archi eguali, e gli angoli $\widehat{ABC}, \widehat{BCD}, \dots$ sono eguali, perchè iscritti in archi eguali: perciò la spezzata iscritta è regolare.

I triangoli $ABM, BCN, \dots$ sono isosceli ed eguali per avere eguali rispettivamente le basi $AB, BC, \dots$ e gli angoli adiacenti ad esse (n. 149). Perciò la spezzata circoscritta ha gli angoli $\widehat{M}, \widehat{N}, \dots$ eguali, ed i lati $MN, NP, \dots$ eguali, perchè formati di parti eguali; ossia la spezzata stessa è regolare.

OSSERVAZIONE. Da questo teorema consegue, che la questione di costruire un poligono regolare di

n lati è ridotta alla divisione della circonferenza in n parti eguali; il che tratteremo in seguito.

§ 7.° Simmetria rispetto ad un punto.

177. Due punti si dicono *simmetrici* rispetto ad un punto se questo dimezza il segmento che unisce i primi due. Questo punto dicesi *centro di simmetria*.

178. Due figure si dicono *simmetriche* rispetto ad un punto, se ogni punto di una figura è simmetrico di un punto dell'altra rispetto allo stesso centro di simmetria.

Ad es. Due lati opposti di un plgr. sono simmetrici rispetto al punto d'incontro delle diagonali. Due angoli op-

posti al vertice sono simmetrici rispetto al vertice comune.

Data una figura $ABC...$ (fig. 96) ed un punto O qualunque del suo piano, e sempre possibile costruire la figura simmetrica della prima rispetto ad O . Basta infatti condurre i raggi OA ,

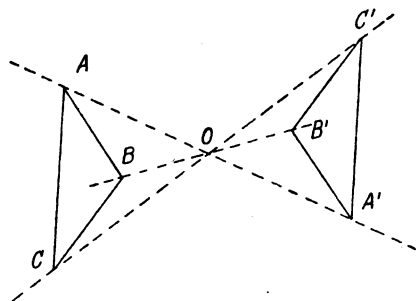


Fig. 96.

OB , OC ,... e sui raggi opposti prendere OA' , OB' , OC' ,.... rispettivamente eguali ad OA , OB , OC ,... La figura $A'B'C'....$ è simmetrica della prima rispetto ad O .

Chiameremo *raggi di simmetria* i raggi OA ed OA' , OB ed OB' : ecc.

179. Una figura può essere simmetrica di sè stessa rispetto ad un punto, ed allora quel punto è *centro* della figura. Ogni segmento che passa per quel punto e termina al contorno della figura vien dimezzato in quel punto: lo stesso segmento poi divide la figura in due parti eguali direttamente, e perciò chiamasi *diametro* della figura.

Ad es. Una circonferenza è simmetrica di sè stessa ri-

petto al suo centro. Un parallelogrammo rispetto al punto d'incontro delle diagonali.

180. 1.^o TEOREMA. *Due figure simmetriche rispetto ad un punto sono eguali direttamente. I segmenti corrispondenti sono in direzioni contrarie.*

Infatti sieno le due figure $ABC, \dots A'B'C', \dots$ (fig. 96) simmetriche rispetto ad O . Se si fa rotare una di esse, per esempio $ABC, \dots$ di mezzo giro intorno ad O , i punti $A, B, C, \dots$ vanno a coincidere coi loro simmetrici $A', B', C', \dots$ e le due figure coincidono. Che due segmenti corrispondenti, come $AB, A'B'$ sieno in direzioni contrarie è evidente perchè paralleli e da bande opposte rispetto ad AA' .

COROLLARIO. *Se una figura è simmetrica di sè stessa rispetto ad un punto, e la si fa rotare di mezzo giro intorno al suo centro, essa viene a riprendere la posizione iniziale.*

2.^o Reciprocamente:

TEOREMA. *Se due figure direttamente eguali hanno i segmenti corrispondenti in direzioni contrarie, esse sono simmetriche rispetto ad un punto.*

Sieno infatti le due figure $ABC, \dots A'B'C', \dots$ (fig. 96) eguali direttamente e coi segmenti corrispondenti $AB, A'B'$; $BC, B'C'$; ecc. in direzioni contrarie. È chiaro che i segmenti $AA', BB', CC', \dots$ che uniscono i punti corrispondenti si dimezzano scambievolmente, perchè diagonali dei parallelogrammi $ABA'B', BCB'C', \dots$; perciò il punto O comune ai detti segmenti è centro di simmetria delle due figure.

OSSERVAZIONE. In due figure simmetriche rispetto ad un punto O , se si considera questo punto come appartenente ad una figura, il suo corrispondente nell'altra figura è il punto stesso. Si dice allora che il punto O è un punto *doppio* o un punto *unito* delle due figure.

181. TEOREMA. *Date due figure direttamente eguali esiste (in generale) un punto del piano, ed uno solo tale che, se si fa rotare una delle figure intorno a quel punto, si può ridurla simmetrica dell'altra rispetto al punto stesso.*

Sieno $ABC, \dots A'B'C', \dots$ (fig. 97) due figure eguali direttamente. Si uniscano due coppie A, A' e B, B' di punti corrispondenti, e dai punti medi dei segmenti AA', BB' si conducano le perpendicolari ai segmenti stessi, le quali s'incontrino in O . Dico che O è il punto cercato. Infatti i due tri-

angoli $\widehat{AOB}$ $\widehat{A'OB'}$ sono eguali per avere i lati ordinatamente eguali, perciò $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$. Conducendo ora i raggi OA'' ,

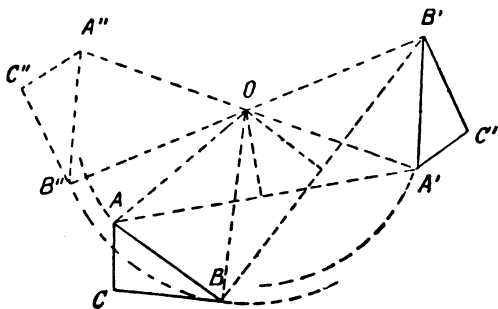


Fig. 97.

OB'' opposti ai raggi OA' , OB' , si ha $\widehat{A''OB''} = \widehat{A'OB'}$; ma $\widehat{A'OB'} = \widehat{AOB}$, dunque $\widehat{A''OB''} = \widehat{AOB}$; ed aggiungendo ad entrambi l'angolo $\widehat{AOB''}$, si ha: $\widehat{AOA''} = \widehat{BOB''}$. Perciò facendo rotare la figura $ABC...$ intorno ad O dell'angolo $\widehat{AOA'}$ il punto A cadrà sul raggio OA'' in una posizione A'' simmetrica di A' rispetto ad O ; per la stessa ragione il punto B si disporrà in B'' , simmetrico di B' ; ed anche gli altri punti come C , della figura stessa si disporranno simmetrici dei punti, come C' , dell'altra figura.

OSSERVAZIONE I.^o Se i segmenti corrispondenti come AB , $A'B'$ sono in direzione opposta, le due figure sono già simmetriche (n. 180, 2.^o).

Se i detti segmenti sono nella stessa direzione, allora le perpendicolari ai segmenti AA' , BB' nei loro punti medi sono parallele ed il punto O non esiste (fig. 98).

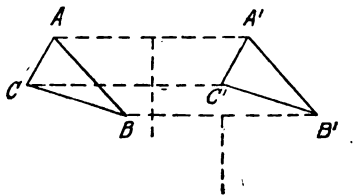


Fig. 98.

OSSERVAZIONE II.^a Il punto O è anche punto doppio delle due figure, perchè se la figura $ABC...$ si fa rotare intorno ad O dell'angolo $\widehat{AOA'}$ (supplementare di $\widehat{AOA''}$) ed in senso

inverso a quello sopra indicato, è chiaro che essa si sovrappone alla figura $A'B'C'...$ Perciò si può dire che:

Due figure eguali direttamente (salvo il caso che i seg-

menti corrispondenti sieno nella stessa direzione), hanno un punto doppio ed uno solo ⁽¹⁾.

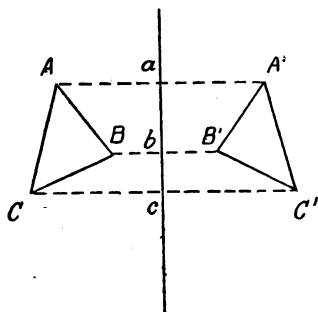
§ 8.° Simmetria rispetto ad una retta.

182. Due punti si dicono *simmetrici* rispetto ad una retta quando il segmento che li unisce è dimezzato ad angolo retto dalla retta stessa. Questa dicesi *asse di simmetria*.

183. Due figure si dicono *simmetriche* rispetto ad una retta, quando i punti dell'una sono simmetrici di quelli dell'altra rispetto alla stessa retta.

Ad es. I lati di un angolo sono simmetrici rispetto alla bisettrice dell'angolo. Due parallele sono simmetriche rispetto alla bisettrice della striscia.

184. Data una figura ABC... (fig. 99) ed una retta (del suo piano) è sempre possibile costruire la figura simmetrica della data rispetto a quella retta. Basta infatti condurre dai



suo piano) è sempre possibile costruire la figura simmetrica della data rispetto a quella retta. Basta infatti condurre dai punti A, B, C.... i segmenti Aa, Bb, Cc,... perpendicolari alla retta e prolungarli in A', B', C',... in modo che $Aa = A'a$, $Bb = B'b$, $Cc = C'c$ La figura A'B'C'.... è simmetrica della figura ABC.... rispetto alla retta data.

Fig. 99.

(1) Ciò equivale a dire che se si immagina che la figura ABC... sia sopra un piano P, e la figura A'B'C'... sopra un altro piano P' sovrapposto al primo, i punti corrispondenti dei due piani sono distinti, mentre il punto O del piano P' è *sovrapposto* al suo corrispondente (O) del piano P. Lo studioso può farne una verifica sperimentale disegnando due figure eguali su due fogli di carta, di cui uno trasparente; e poi, sovrapposto questo all'altro in un modo qualsiasi, cercare colla costruzione indicata il punto O, e verificare che facendo rotare il foglio trasparente intorno ad O, si può ridurre la figura rotante a coincidere colla sottoposta.

185. Una figura può essere simmetrica di sè stessa rispetto ad una retta, che diremo *asse di simmetria* della figura.

Es. Un triangolo isoscele ha per asse di simmetria l'altezza che concorre coi lati eguali.

Una figura può avere anche più assi di simmetria.

Ad es. Due rette concorrenti hanno per assi di simmetria le bisettrici dei loro angoli: il triangolo equilatero le tre altezze: il rombo le due diagonali: il rettangolo le congiungenti i punti medi dei lati opposti: il quadrato tanto le diagonali, che le congiungenti i punti medi dei lati opposti. Il circolo ha infiniti assi di simmetria nei suoi diametri.

186. TEOREMA. *Due figure simmetriche rispetto ad una retta sono eguali inversamente.*

Infatti (fig. 99) se si fa rotare una di esse, per es. ABC... intorno all'asse di simmetria di un mezzo giro essa viene a coincidere coll'altra.

COROLLARIO. *Se una figura è simmetrica di sè stessa rispetto ad una retta, e si fa rotare di mezzo giro intorno alla retta stessa, la figura riprende la posizione iniziale.*

OSSERVAZIONE. In due figure ABC..., A'B'C... simmetriche rispetto ad una retta, se si considera un punto M dell'asse di simmetria, come appartenente ad una di esse, il suo corrispondente dell'altra è il punto stesso. Ciò è chiaro perchè due triangoli, come MAB, MA'B' sono eguali inversamente. Perciò:

Due figure simmetriche rispetto ad una retta hanno infiniti punti doppi: il loro luogo è l'asse di simmetria.

187. TEOREMA. *Date due figure eguali inversamente esiste una retta ed una sola tale che, se si fa scorrere una delle figure parallelamente a quella retta, si può ridurla simmetrica dell'altra rispetto alla retta stessa.*

Sieno due figure ABC,... A'B'C'.... (fig. 100) eguali inversamente. Si unisca A con A', B con B', e si trovino i punti medi M ed N dei segmenti AA' e BB'. La retta MN è la retta cercata. Infatti dai punti A, B ed A', B' si conducano le perpendicolari alla MN ad incontrarla rispettivamente in α , b , α' , b' . Intanto dall'eguaglianza delle coppie di triangoli rettangoli MA α , MA' α' , ed NB b , NB' b' (perchè equiangoli e colle ipotenuse eguali) si deduce A α = A' α' e B b = B' b' . Conducansi ora da B e da B' le parallele alla MN ad incon-

trare rispettivamente le Aa , e Bb in P e P' : si avrà $Bb = Pa$ e $B'b' = P'a'$; ma $Bb = B'b'$, perciò $Pa = P'a'$; e sottraendo membro a membro dall' eguaglianza $Aa = A'a'$, si ha infine $AP = A'P'$. Perciò i due triangoli rettangoli ABP , $A'B'P'$, avendo $AB = A'B'$ e $AP = A'P'$, sono eguali, e sarà $BP = B'P'$; da cui $ab = a'b'$ (cioè le proiezioni dei segmenti AB ed $A'B'$

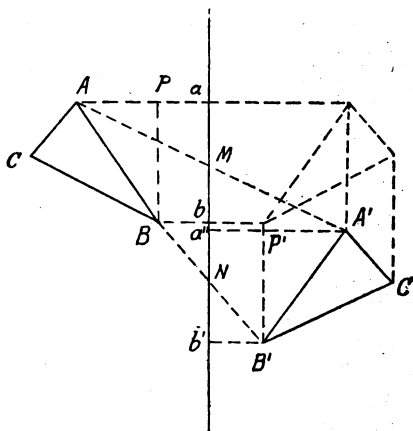


Fig. 100.

sulla MN sono eguali); ed aggiungendo ad entrambi $a'b$ si ha: $aa' = bb'$. Ciò posto, se si fa scorrere la figura $A'B'C'$ in modo che i punti A' , B' descrivano due segmenti eguali ad aa' e paralleli ad MN (cioè strisciando secondo la MN) è chiaro che venendo a' in a e b' in b il segmento $A'B'$ risulterà simmetrico di AB rispetto ad MN , e lo stesso avverrà della figura $A'B'C'$ rispetto alla ABC ... ⁽¹⁾.

OSSERVAZIONE I. Se la MN risultasse perpendicolare ad AA' , aa' sarebbe nullo; così pure bb' : il che equivale a dire che le due figure sarebbero già simmetriche rispetto alla MN .

OSSERVAZIONE II. Se si considera un punto M della retta ab come facente parte della figura ABC ,... il suo corrispondente nell'altra è un punto M' della retta stessa e tale che $MM' = aa'$ e nello stesso senso. Basta infatti osservare che se si uniscono M ed M' con due coppie di punti corrispondenti A , B ed A' , B' i triangoli MAB , $M'A'B'$ sono in-

⁽¹⁾ Si fa uso qui del teorema: *Se una figura si muove sul piano in modo che due suoi punti descrivano due segmenti eguali e nella stessa direzione, anche gli altri punti descrivono segmenti come i primi*: la cui facile dimostrazione lasciamo allo studioso.

versamente eguali, perchè diventano simmetrici rispetto alla *ab*, quando si riduce la figura *A'B'C'*... a diventar simmetrica dell'altra. Si può dire dunque che:

Due figure eguali inversamente hanno una retta doppia ; nel senso però che i punti della retta hanno per corrispondenti dei punti della retta stessa, situati ciascuna coppia ad eguale distanza ; e che diventano altrettanti punti doppi, quando collo scorrimento di una delle figure lungo quella retta si riduce la detta figura simmetrica dell'altra rispetto alla retta stessa ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Osservazione analoga a quella della pag. 116.

CAPITOLO IV.

POLIGONI EQUIVALENTI

§ 1.º Definizioni.

188. Nei capitoli precedenti si è trattato dei poligoni considerandoli come *figure*, cercando le mutue relazioni fra i loro elementi; o, per dirlo in modo più volgare, si è studiata più specialmente la loro *forma*.

Passiamo ora a studiare la loro *estensione*, ossia a considerarli come grandezze. È necessario perciò stabilire per essi i concetti di eguaglianza di estensione (equivalenza), di somma e di differenza (diseguaglianza).

189. L'intuizione ci avverte che due poligoni (ed in generale due superficie finite) anche senza essere eguali, possono avere eguale estensione, cioè essere equivalenti. Per dare a questo concetto una forma razionale non possiamo a questo punto dire altro se non che due poligoni (due superficie finite) sono equivalenti, se sono formati o decomponibili nello stesso numero di parti eguali ciascuna a ciascuna ⁽¹⁾.

(1) Resta però a questo punto impregiudicata la questione, se possono essere equivalenti senz'essere decomponibili nello stesso numero di parti eguali.

190. Due poligoni si dicono *adiacenti*, se esterni l'uno all'altro e con una parte di contorno comune, come i poligoni *A* e *B* (fig. 101).

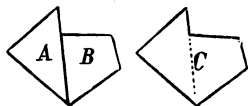


Fig. 101.

191. *Addizionare due poligoni* vuol dire disporli adiacenti e sopprimere la parte di contorno comune; il poligono risultante è la loro *somma*. Così (fig. 101) *C* è la somma dei poligoni *A* e *B* e si scrive:

$$C = A + B.$$

Addizionare più poligoni vuol dire addizionarne due, poi la somma trovata con un terzo, e così di seguito. L'operazione è sempre possibile, non solo ma ha un po' dell'arbitrario, perchè due poligoni possono disporsi adiacenti in quanti modi diversi si vuole: ma le somme ottenute sono tutte equivalenti, e perciò è affatto indifferente considerare l'una piuttosto che l'altra.

Per la stessa ragione nel fare l'addizione ad un poligono si possono sostituire le parti, in cui può essere decomposto: e reciprocamente a due o più parti di una somma sostituire la loro somma parziale.

In altre parole la somma di più poligoni gode delle proprietà commutativa, associativa e dissociativa.

192. Dati due poligoni *A*, *B* (fig. 102), se è possibile disporli in modo che uno di essi, per es. *B*, sia tutto interno all'altro con una parte di contorno comune, si dice che si fa la sot-

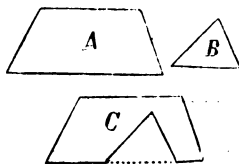


Fig. 102.

trazione del poligono *B* dal poligono *A*. Il poligono *A* è il *maggiore*, *B* il *minore* e si scrive

$$A > B \text{ o } B < A,$$

il poligono *C* ottenuto sopprimendo la parte comune ad *A* ed a *B* è la *differenza* tra *A* e *B*, e si scrive

$$C = A - B.$$

È chiaro poi che:

$$B = A - C$$

e che:

$$A = B + C.$$

Anche questa operazione ha dell'arbitrario, e nell'eseguirla possiamo sostituire ai poligoni le loro parti, ove occorra; ma non è sempre possibile.

193. E qui occorre fare una distinzione. Vi sono poligoni pei quali l'equivalenza porta con sè anche l'eguaglianza di forma. Tali sono i quadrati (confrontati tra loro), i triangoli equilateri, i parallelogrammi equiangoli con un lato eguale, e così via.

Per questi la sottrazione è sempre possibile colla semplice sovrapposizione. In altre parole si comportano come grandezze di prima specie.

194. Ma ciò non avviene se si confronta uno di essi, per es. un quadrato, con un'altro poligono di specie diversa, o due poligoni qualunque; perchè sovrapponendo uno dei due all'altro, in generale avviene che ciascuno abbia una parte esterna rispetto all'altro, e per le due parti non comuni (colle quali si volesse ripetere l'operazione) vale la stessa osservazione ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Nè sapremmo dimostrare a questo punto che ripetendo l'operazione più volte colle parti non comuni, questa debba avere un termine.

E perciò coi teoremi che seguono ci proponiamo di risolvere la questione per due poligoni qualunque col sostituire ai medesimi altri due poligoni che risultino formati dello stesso numero di parti eguali a quelle dei primi, ossia col trasformarli in altri equivalenti, ma che siano paragonabili per sovrapposizione; poichè qualora si tratti della sola estensione, ad un poligono se ne può sostituire un altro equivalente.

195. TEOREMA. *Dati tre poligoni A, B, C (fig. 103) se A e B sono decomponibili nello stesso numero di parti eguali, e B e C sono pure decomponibili nello stesso numero di parti eguali (diverse dalle prime), anche i poligoni A e C sono decomponibili nello stesso numero di parti eguali.*

Siano A e B (fig. 103) decomposti in due parti rispettivamente eguali (che sono un trapezio ed un

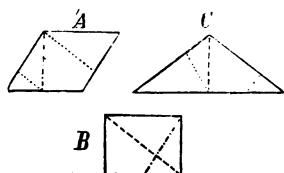


Fig. 103.

triangolo rettangolo), e siano B e C decomposti in due parti rispettivamente eguali (che sono due triangoli rettangoli). In tal modo il poligono B è diviso in parti in due modi differenti, così che

le prime parti considerate vengono suddivise colla seconda divisione e reciprocamente. Ciò posto, se nelle parti di A e di C si fanno le stesse suddivisioni che si avvertono nelle parti corrispondenti di B, i due poligoni A e C risultano decomposti insieme a B nello stesso numero di parti rispettivamente eguali (nel nostro caso in quattro parti eguali ciascuna a ciascuna).

La proposizione può essere estesa anche a più poligoni, e cioè:

Dati più poligoni $A, B, C, D, E, \dots H, L$: se il primo ed il secondo sono decomponibili nello stesso numero di parti eguali; così pure il secondo ed il terzo, il terzo ed il quarto..., il penultimo e l'ultimo, anche il primo e l'ultimo si possono suddividere nello stesso numero di parti eguali.

Infatti il ragionamento fatto coi poligoni A, B, C basta ripeterlo coi poligoni A, C, D ; $A, D, E, \dots$ e così successivamente fino ai poligoni A, H, L ,

196. 1.° In un parallelogrammo un lato qualunque dicesi *base*, e la distanza del lato opposto dalla base l'*altezza* corrispondente. In un parallelogrammo vi sono due altezze.

2.° In un trianngolo un lato qualunque dicesi *base*, e la sua distanza dal vertice opposto l'*altezza* corrispondente. Un triangolo ha tre altezze.

4.° In un trapezio i due lati paralleli si dicono le *basi* e la loro distanza l'*altezza*.

197. 1.° Un rettangolo, che ha per lati consecutivi due segmenti a, b , si dice il *rettangolo dei due segmenti a, b* e si rappresenta con $a. b$ ⁽¹⁾

2.° Un quadrato, che ha i lati eguali ad un segmento a , si dice il *quadrato di a* e si rappresenta con a^2 ⁽¹⁾.

§ 2.° Trasformazione dei poligoni in rettangoli e quadrati.

198. TEOREMA. *Un parallelogrammo equivale al rettangolo di equal base e di eguale altezza.*

⁽¹⁾ S' intende che ai simboli $a. b$ a^2 non va attribuito alcun significato aritmetico.

Immaginiamo il pllgr. ed il rettangolo sovrapposti in modo che le basi eguali coincidano. Siano

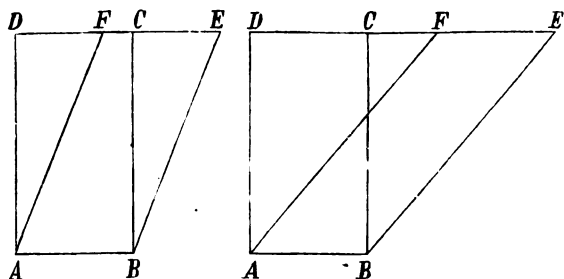


Fig. 104.

adunque il rettangolo ABCD ed il pllgr. ABEF (fig. 104) sovrapposti e colla base comune AB: i lati CD, EF opposti ad essa (per l'eguaglianza delle altezze corrispondenti) dovranno trovarsi sopra una stessa retta parallela ad AB. Possono darsi parecchi casi:

1.° Il punto F cade sul lato DC: in questo caso i due parallelogrammi sono decomposti ciascuno in due parti, di cui l'una ABCF è comune, e le altre due, cioè i triangoli ADF, BCE, sono manifestamente eguali (n. 126, Cor. 2.°); perciò i due parallelogrammi sono equivalenti.

2.° Il punto F coincide con C; come il caso precedente.

3.° Il punto F cade sul prolungamento di DC. Si prenda di seguito a DC una serie di segmenti adiacenti ed eguali a DC fino ad averne uno sovrapposto in tutto od in parte ad FE (n. 72). I parallelogrammi costruiti su AB ed aventi per lati opposti ad AB successivamente questi segmenti sono a due a due equivalenti, perchè decomponibili nello stesso numero di parti eguali; perciò anche il ret-

tangolo ABCD e il pllgr. ABEF sono equivalenti perchè decomponibili nello stesso numero di parti eguali (n. 195).

COROLLARIO. *Due parallelogrammi di eguale base e di eguale altezza sono equivalenti.*

Difatti essi equivalgono ad un rettangolo della stessa base e della stessa altezza, e perciò sono decomponibili nello stesso numero di parti eguali (n. 195).

199. TEOREMA. *Un triangolo equivale al rettangolo di metà base e della stessa altezza.*

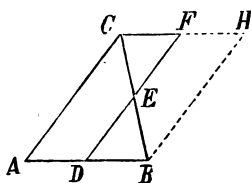


Fig. 105.

Nel triangolo ABC (fig. 105) si trovi il punto medio D delle base AB e si compia il parallelogrammo CADF, e sia E il punto d'incontro della DF con

CB. Il triangolo ed il parallelogrammo sono composti ciascuno di due parti, di cui una ADEC comune; e le altre due, cioè i triangoli DEB, CEF, eguali (n. 105); perciò il triangolo equivale al parallelogrammo ed anche al rettangolo di metà base e della stessa altezza (n. 198).

COROLLARIO. 1.º *Un triangolo equivale al rettangolo della stessa base e di metà altezza; od ancora alla metà del rettangolo della stessa base e della stessa altezza.*

Infatti (fig. 105) se si prende come base comune al triangolo ed al parallelogrammo il lato AC, si può facilmente verificare (n. 132, osservazione) che l'altezza corrispondente del parallelogrammo è la metà di quella del triangolo.

Infine se da B si conduce la parallela alla AC

ad incontrare in H la CF , si ha il parallelogrammo $ABHC$ della stessa base e della stessa altezza del triangolo.

Ora

$$ABC = ADFC, ADFC = \frac{1}{2} ABHC$$

dunque

$$ABC = \frac{1}{2} ABHC.$$

COROLLARIO. 2.^o *Due triangoli di basi eguali ed altezze corrispondenti eguali sono equivalenti* (n. 195)

200. TEOREMA. *Un trapezio equivale al rettangolo avente la stessa altezza e la base eguale alla semisomma delle basi del trapezio.*

Sia il trapezio $ABCD$ (fig. 106); sul prolungamento della base AB si prenda $BF = CD$; si conduca DF , che incontrerà CB in un punto E . Il triangolo

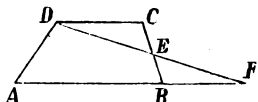


Fig. 106.

ADF ed il trapezio sono equivalenti, perchè composti ciascuno di due parti, di cui l'una $ABED$ è comune; le altre due, cioè i triangoli DCE , EBF sono eguali (n. 105). Ma il triangolo ADF equivale al rettangolo che ha per base $\frac{1}{2} AF$, cioè $\frac{1}{2} (AB + DC)$, e la stessa altezza; dunque il trapezio equivale ecc. (n. 195).

COROLLARIO. *Il trapezio equivale al rettangolo della stessa altezza e che ha per base il segmento che unisce i punti medi dei lati non paralleli* (n. 132. Cor. 2.^o),

201. TEOREMA. *Un poligono circoscritto ad un cerchio equivale al rettangolo, che ha per base il*

semiperimetro del poligono e per altezza il raggio del cerchio.

Sia il poligono $ABCDE$ (fig. 107) circoscritto

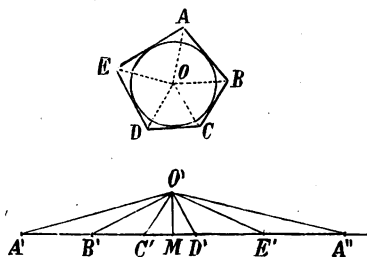


Fig. 107.

al cerchio O . Sopra una retta si prendano successivamente $A'B' = AB$, $B'C' = BC$..., $E'A'' = EA$ e sopra $A'A''$, eguale al perimetro del poligono, si costruisca il triangolo $O'A'A''$ col-

l'altezza $O'M$ eguale al raggio del cerchio. Il poligono dato ed il triangolo $A'O'A''$ sono equivalenti: perchè unendo O coi vertici del poligono dato ed O' con B' , C' , D' , E' , i due poligoni vengono decomposti in altrettante coppie di triangoli AOB , $A'O'B'$; BOC , $B'O'C'$ ecc., equivalenti. Ma il triangolo $A'O'A''$ equivale al rettangolo che ha per base $\frac{1}{2} A'A' = \frac{1}{2}$ perimetro $ABCDE$ e per altezza $O'M =$ raggio del cerchio O ; dunque il poligono equivale ecc.... (n. 195).

202. TEOREMA. *Un poligono qualunque si può trasformare in un rettangolo; cioè si può costruire un rettangolo equivalente ad un poligono dato.*

Sia $ABCDE$ un poligono qualunque (fig. 108): si conduca una diagonale in modo da staccare un triangolo AED : da E conducasi la parallela ad AD ad incontrare il prolungamento di CD in F ; conducasi AF . Il poligono $ABCF$ è equivalente al poligono dato ed ha un lato di meno; ed infatti sì l'uno che l'altro sono composti di due parti di cui

l'una ABCD comune, e le altre due, cioè i triangoli ADE, ADF, sono equivalenti per avere la stessa base AD e le altezze corrispondenti eguali (n. 199, corollario 2.º).

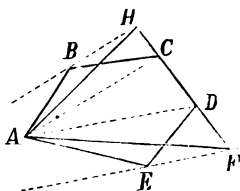


Fig. 108.

Con analoga costruzione si passa dal poligono ABCF al triangolo AHF; e poichè il triangolo si sa trasformare in un rettangolo, questo sarà equivalente anche al poligono dato.

203. Un poligono si può trasformare anche in un quadrato. Per far ciò occorre premettere il seguente

TEOREMA. *In un triangolo rettangolo il quadrato di un cateto equivale al rettangolo dell'ipotenusa e della proiezione del cateto sull'ipotenusa.*

Sia ABC (fig. 109) un triangolo rettangolo in A; si costruisca sul cateto AB il quadrato ABDE e si conduca da A la perpendicolare AF all'ipotenusa; BF è la proiezione del cateto AB. Si costruisca ora il rettangolo BFHL col lato BL eguale all'ipotenusa BC. Dico che il quadrato ABDE equivale al rettangolo BFHL.

Infatti si prolunghino LB, HF ad incontrare la DE rispettivamente in M ed in P. I triangoli ABC, DBM sono eguali per avere $DB = BA$, $\widehat{BDM} = \widehat{BAC}$ (retti) e $\widehat{DBM} = \widehat{ABC}$ perchè complementari dello stesso angolo $\widehat{ABM}$; perciò $BM = BC = BL$. Ciò posto, il quadrato ABCE ed il pllgr. ABMP sono equivalenti per avere la stessa base AB e la stessa altezza corrispondente; il parallelogrammo ABMP ed il rettangolo BFHL, sono

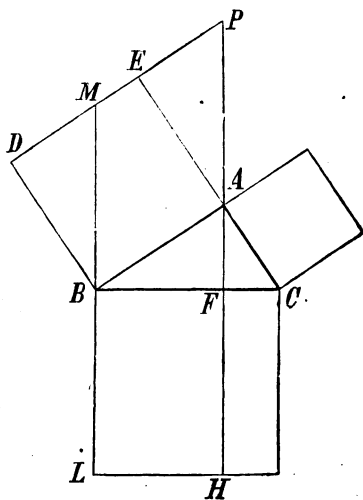


Fig. 109.

Infatti (fig. 109) il rettangolo BFHL, equivale al quadrato fatto sul cateto AB; allo stesso modo si dimostra che il rettangolo che ha per lati CF, FH equivale al quadrato fatto su AC; perciò la somma dei due rettangoli, cioè il quadrato fatto sulla ipotenusa BC, equivale alla somma dei quadrati fatti sui cateti.

(¹) Filosofo e matematico greco nato verso il 580 a C., discepolo di Talete; dopo aver visitato l'Egitto, l'India ed altri paesi venne in Italia e si stabilì a Crotone nella Magna Grecia, dove fondò la celebre scuola, che da lui prese il nome; in seguito dovette fuggire a Taranto, poi a Metaponto, dove morì. Nel campo della Geometria oltre il celebre teorema sopra menzionato, devonsi a lui (od alla sua scuola) la dimostrazione che la diagonale del quadrato è incommensurabile col lato, la teoria dei solidi regolari, i fondamenti della teoria degli isoperimetri (quantunque di questi ultimi non si sia ben certi) ed altre scoperte. Però la scuola pitagorica non uscì, si può dire, dalla retta e dal cerchio.

equivalenti per avere le basi BM, BL eguali e la stessa altezza corrispondente. Perciò anche il quadrato ABDE ed il rettangolo BFHL sono equivalenti, perchè si possono decomporre nello stesso numero di parti eguali (n. 195).

204. TEOREMA DI PITAGORA (¹). *In un triangolo rettangolo il quadrato dell'ipotenusa equivale alla somma dei quadrati dei cateti.*

205. TEOREMA. *Un poligono qualunque si può trasformare in un quadrato.*

Si trasformi prima il poligono dato in un rettangolo, e sia questo ABCD (fig. 110). Sul lato maggiore AB, come diametro, si descriva una semicirconfenza e sopra AB si prenda $AE = AD$. Da E si elevi la perpendicolare ad AB ad incontrare in F la semicirconfenza; si congiunga A con F: dico che AF è il lato del quadrato richiesto. Infatti congiunto F con B si ha un triangolo rettangolo AFB, da cui:

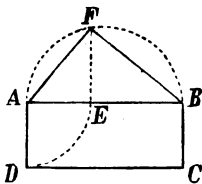


Fig. 110.

$$AF^2 = AB.AE = AB.AD.$$

206. La trasformazione di un poligono in un quadrato permette di asserire che:

Dati due poligoni è possibile decomporli in parti in modo da verificarsi o l'uno o l'altro di questi due casi:

o le parti dell'uno sono eguali ciascuna a ciascuna a quelle dell'altro;

oppure uno è formato di parti eguali ciascuna a ciascuna a quelle dell'altro, più di altre parti.

Infatti sieno *A* e *B* i due poligoni; si trasformino in due quadrati, e sieno questi *A'* e *B'* rispettivamente. I due quadrati sono eguali o sono diseguali.

1.° Se sono eguali, sovrapponendoli opportunamente, essi coincideranno. Allora la rete dei segmenti che dividono in parti uno di essi suddividerà le parti dell'altro e reciprocamente: cosicchè tenuto conto delle nuove suddivisioni, i due quadrati risultano decomposti nello stesso numero

di parti rispettivamente eguali. Ciò posto, se nelle parti dei poligoni A e B si fanno le stesse suddivisioni che si sono fatte nelle corrispondenti parti dei quadrati A' e B' , anche i poligoni A e B insieme ai quadrati A' e B' risultano decomposti nello stesso numero di parti rispettivamente eguali.

2.° Se i quadrati non sono eguali, sovrappo-
nendoli con un angolo in comune, uno di essi, ad
es. B' , sarà tutto interno all'altro. Allora la rete
dei segmenti, che sta nel quadrato B' (insieme ai
due lati che cadono nel quadrato A), suddividerà
le parti del quadrato A' ; e parte della rete dei seg-
menti del quadrato A' (quella cioè che cade entro
il quadrato B') suddividerà le parti del quadrato B' .
Di guisa che tenuto conto delle nuove suddivisioni,
il quadrato A' conterrà tutte le parti del quadrato
 B' insieme ad altre.

Se ora nelle parti dei poligoni A e B si fanno le
stesse suddivisioni avvenute nelle corrispondenti parti
dei quadrati A' e B' , risulterà che il poligono A con-
tiene le parti eguali a *tutte quelle di B* insieme ad altre.

Nel primo caso A risulta equivalente a B ; nel
secondo sarà $A > B$: e la differenza è rappresen-
tata dalla somma di quelle parti di A che non
hanno le corrispondenti in B .

Si conclude adunque che due poligoni o sono
equivalenti o l'uno è maggiore dell'altro; ed un
caso esclude l'altro.

Dopo ciò è manifesto che i poligoni sono gran-
dezze della seconda specie, e che anche per essi
valgono le proposizioni di cui al n. 71.

207. Alle medesime conclusioni si può giungere
anche per altra via. Premettiamo intanto il

TEOREMA. *In un parallelogrammo se per un punto di una diagonale si conducono le parallele ai lati, il parallelogrammo è decomposto in quattro parallelogrammi, dei quali i due, che si trovano da bande opposte della diagonale, sono equivalenti.*

Nel parallelogrammo ABCD (fig. 111) pel punto O della diagonale BD si conducano le EF, GH parallele ai lati; dico che i due parallelogrammi AEOG OHCF sono equivalenti.

Infatti si conducano da E e da H le EL, HM parallele alla BD. I parallelogrammi AEOG, LEOD sono equivalenti per avere la stessa base EO e le altezze corrispondenti eguali; per la stessa ragione i parallelogrammi OHCF, OHMD sono equivalenti. Ma i parallelogrammi OHMD, OELD sono equivalenti per avere la stessa base OD e le altezze corrispondenti eguali (altezze dei triangoli eguali OEB, OHB); dunque anche i parallelogrammi AEOG, OHCF sono equivalenti (n. 195).

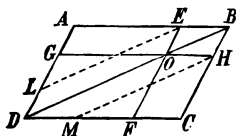


Fig. 111.

208. Ne consegue:

TEOREMA. *Un rettangolo si può trasformare in un altro di base data.*

Sia ABCD il rettangolo dato (fig. 112) e sia DE la base data. Si compia il rettangolo ADEF; si conduca la diagonale DF ad incontrare CB in H (prolungandola ove occorra); da H si conduca la parallela a DC ad incontrare AD ed EF in L ed M: il rettangolo DEML co-

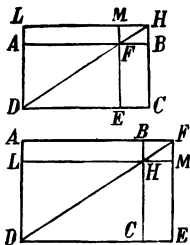


Fig. 112.

struito sulla base DE è il richiesto. Infatti questo rettangolo ed il dato sono formati ciascuno di due parti di cui l'una, cioè ADEF nella fig. 102 a) e LDCH nella fig. 102 b), è comune, e le altre due, cioè LMFA ed FBCE nel 1.° caso, ABHL e HCEM nel 2.° sono equivalenti (n. 207). Dunque il rettangolo DEML equivale al rettangolo dato.

Ciò posto, è chiaro che un poligono qualunque si può trasformare in un rettangolo di data base; perciò quanto è stato detto al n. 206 si può ripetere, sostituendo ai due quadrati due rettangoli della stessa base equivalenti ai poligoni dati.

§ 3.° Alcuni teoremi sui quadrati e rettangoli dei segmenti divisi in parti. - Alcune conseguenze del teorema di Pitagora.

209. TEOREMA. *Il rettangolo di un segmento e della somma di due (o più) altri equivale alla somma dei rettangoli del primo segmento e di ciascuno degli altri.*

Se m , a , b sono i segmenti dati, si ha:

$$m \cdot (a + b) = m \cdot a + m \cdot b.$$

In particolare se $a = b$ si ha:

$$m \cdot 2a = 2m \cdot a.$$

210. TEOREMA. *Il rettangolo di un segmento e della differenza di altri due equivale alla differenza dei rettangoli del primo segmento e di ciascuno degli altri due.*

Se m , a , b sono i segmenti dati, ed è $a > b$ si ha:

$$m \cdot (a - b) = m \cdot a - m \cdot b$$

Nel caso che $a = b$, la differenza $a - b$ è un

segmento nullo. Allora si dirà che il rettangolo di base m e di altezza nulla è *nullo*. Anche per questa grandezza nulla vale quanto è detto al n. 70.

211. TEOREMA. *Il quadrato della somma di due segmenti equivale alla somma dei quadrati dei due segmenti aumentata del doppio rettangolo degli stessi segmenti.*

Sia $AB = AC + CB$ (fig. 113): si costruisca sopra AB il quadrato $ABDE$; e su BD preso $BL = BC$ si conducano dai punti C ed L le CF , LG parallele ai lati del quadrato, che s'incontrino in H . Il quadrato $ABDE$ è così decomposto in quattro parti, e cioè in due quadrati $GHFE$, $CBLH$ coi lati eguali ai segmenti AC , CB , ed in due rettangoli $ACHG$, $HLDF$ che hanno i lati eguali ai segmenti AC e CB ; perciò

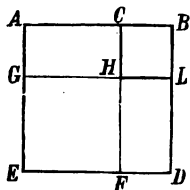


Fig. 113.

$$AB^2 = (AC + CB)^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC \cdot BC.$$

COROLLARIO. In particolare: *Se un segmento è doppio di un altro, il quadrato del primo è quadruplo del quadrato del secondo.*

212. TEOREMA. *Il quadrato della differenza di due segmenti equivale alla somma dei quadrati dei due segmenti diminuita del doppio rettangolo degli stessi segmenti.*

Sia $AB = AC - BC$ (fig. 114): si costruiscano sopra AC e BC e da bande opposte i quadrati $ACDE$, $BCFH$. Sopra AE prendasi $EM = BC$ e compiasi il rettangolo $EMND$; di poi prolunghisi HB ad incontrare MN in L . I rettangoli $MNDE$, $LNFB$ sono eguali

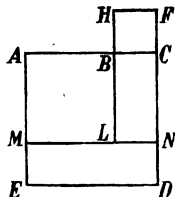


Fig. 114.

ed hanno i lati rispettivamente eguali ai segmenti AC, BC. Ciò posto se dalla somma dei due quadrati si tolgono questi due rettangoli si ha ABLM che è chiaro essere AB^2 : perciò

$$AB^2 = (AC - BC)^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC$$

213. TEOREMA. *La differenza dei quadrati di due segmenti equivale al rettangolo della somma e della differenza dei due segmenti.*

Sieno ABDE, BCFH (fig. 115) i quadrati costruiti sui due segmenti AB, BC e dalla stessa

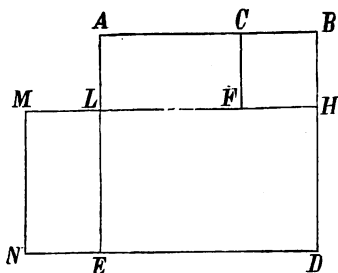


Fig. 115.

banda: si prolunghi FH la quale incontri AE in L e si prenda di seguito $LM = BC$; di poi si compia il rettangolo MLEN che sarà eguale al rettangolo ACFL. Allora la differenza dei

due quadrati (che è la somma dei rettangoli EDHL, ALFC) equivale al rettangolo MNDH, che ha per lati

$$DN = DE + EN = AB + BC$$

ed

$$HD = BD - BH = AB - BC:$$

perciò:

$$AB^2 - BC^2 = (AB + BC) \cdot (AB - BC).$$

214. TEOREMA. *In un triangolo rettangolo il quadrato dell'altezza equivale al rettangolo dei segmenti in cui l'altezza divide l'ipotenusa (le proiezioni dei cateti).*

Sia ABC (fig. 116) un triangolo rettangolo in A: si conduca l'altezza AD: dico che:

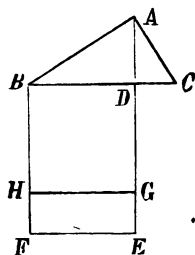


Fig. 116.

$$AD^2 = BD \cdot DC.$$

Si costruisca su BD il rettangolo BDEF col lato $BF = BC$, e su BF preso $BH = BD$, si compia il quadrato BDGH. Dal triangolo ABC rettangolo in A si ha: $AB^2 = BD \cdot BF$ (n. 203) od anche, come appare dalla figura:

$$AB^2 = BD^2 + HG \cdot HF.$$

Ma dal triangolo ABD rettangolo in D si ha (n. 204):

$$AB^2 = BD^2 + AD^2$$

perciò sostituendo:

$$BD^2 + AD^2 = BD^2 + HG \cdot HF.$$

e togliendo BD^2

$$AD^2 = HG \cdot HF.$$

Ma $HG = BD$, $HF = DC$, dunque finalmente

$$AD^2 = BD \cdot DC.$$

OSSERVAZIONE. Questo teorema fornisce un'altra soluzione del

215. PROBLEMA. *Trasformare un rettangolo in un quadrato.*

Infatti, se BD e DC sono eguali ai lati del rettangolo dato, sulla loro somma BC, come diametro, si descriva una semicirconferenza; dal punto D si elevi la perpendicolare a BC ad incontrare in A la semicirconferenza: il segmento AD è il lato del quadrato richiesto, come facilmente si può dimostrare.

216. TEOREMA. *In un triangolo il quadrato di un lato equivale alla somma dei quadrati degli altri due aumentata o diminuita del doppio rettangolo di uno dei due lati e della proiezione dell'altro su que-*

sto, secondochè l'angolo opposto al primo lato è ottuso oppure acuto.

1.° CASO. Sia ABC un triangolo (fig. 117) coll'angolo in A ottuso: si trovi la proiezione AD del lato AB su CA (che cade sul prolungamento del lato stesso CA): dico che:

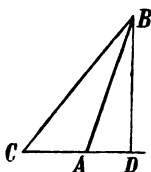


Fig. 117.

$$CB^2 = CA^2 + AD^2 + 2CA.AD$$

Infatti, essendo $CD = CA + AD$ si ha:

$$CD^2 = CA^2 + AD^2 + 2CA.AD$$

ed aggiungendo BD^2 ,

$$CD^2 + BD^2 = BD^2 + CA^2 + AD^2 + 2CA.AD:$$

ma

$$CD^2 + BD^2 = BC^2 \quad \text{e} \quad AD^2 + BD^2 = AB^2,$$

perciò sostituendo

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 + 2AC.AD.$$

2.° CASO. Sia ora il triangolo ABC (fig. 118) coll'angolo $\widehat{A}$ acuto: si trovi ancora la proiezione AD di AB su AC (che cade sul lato stesso AC) dico che:

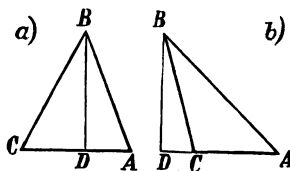


Fig. 118.

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC.AD.$$

Infatti essendo $CD = AC - AD$ (fig. 118, a), oppure $CD = AD - AC$ (fig. 118 b) si ha:

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC.AD,$$

ed aggiungendo BD^2 ;

$$CD^2 + BD^2 = BD^2 + AC^2 + AD^2 - 2AC.AD$$

ed anche (come nel 1.° caso):

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC.AD.$$

OSSERVAZIONE 1.^a Se l'angolo $\widehat{A}$ è retto, il doppio rettangolo si annulla, perchè la proiezione di un

lato sull'altro è nulla, e si ricade nel teorema di Pitagora.

OSSERVAZIONE 2.^a Coi teoremi n. 204 e 216 si è dimostrato che: *Secondochè un angolo di un triangolo è acuto, retto od ottuso, il quadrato del lato opposto è minore, equivalente o maggiore della somma dei quadrati degli altri due lati.*

Reciprocamente:

217. TEOREMA. *In un triangolo secondochè il quadrato di un lato è minore, equivalente o maggiore della somma dei quadrati degli altri due, l'angolo opposto al primo lato è acuto, retto od ottuso.*

Si dimostra per assurdo.

218. TEOREMA. *In un triangolo la somma dei quadrati di due lati equivale a due volte la somma dei quadrati della mediana concorrente con essi e della metà del terzo lato.*

Sia ABC un triangolo (fig. 119), AD la mediana condotta da A: si proietti la mediana sopra BC e sia DH la proiezione, che suppongasi cadere sopra DC.

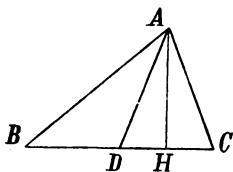


Fig. 119.

Dal triangolo ABD si ha (n. 216):

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD.DH$$

e dal triangolo ADC:

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2CD.DH.$$

Addizionando le due relazioni e ricordando che $BD = CD$ si ottiene appunto:

$$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2$$

COROLLARIO. *In un parallelogrammo la somma dei quadrati dei lati equivale alla somma dei quadrati delle diagonali.*

Infatti sia ABCD un pllgr. (fig. 38) ed O il punto d'incontro delle diagonali. Dal triangolo ABC si ha:

$$AB^2 + BC^2 = 2AO^2 + 2BO^2$$

e dal triangolo ADC

$$AD^2 + CD^2 = 2AO^2 + 2DO^2$$

addizionando, e tenuto conto che $BO = DO$

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 4AO^2 + 4BO^2$$

ma $AC = 2AO$, $BD = 2BO$, perciò (n. 211, Cor.)

$$AC^2 = 4AO^2 \text{ e } BD^2 = 4BO^2$$

sostituendo

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2.$$

§ 4.° Seganti nel cerchio - Teorema di De Paolis e sue conseguenze.

219. TEOREMA. *Se da un punto interno od esterno ad una circonferenza si conducono delle seganti, i rettangoli dei segmenti che la circonferenza determina su ciascuna segante, a partire da quel punto, sono equivalenti.*

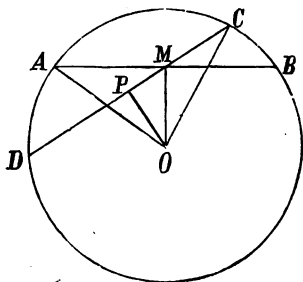


Fig. 120.

1.° CASO. Sia O la circonferenza (fig. 120) ed M un punto interno pel quale passino due corde AB, CD. Dico che

$$MA.MB = MC.MD.$$

Infatti si conduca OP perpendicolare a CD. Si ha

$$MC.MD = (CP - MP).(DP + MP)$$

ossia per essere $CP = DP$ (n. 137)

$$MC.MD = (CP - MP).(CP + MP)$$

ed anche (n. 202)

$$MC.MD = CP^2 - MP^2$$

ed aggiungendo e togliendo OP^2 ,

$$MC.MD = (CP^2 + OP^2) - (MP^2 + OP^2)$$

ed ancora (n. 213)

$$MD.MD = OC^2 - OM^2.$$

Per l'altra corda AB si dimostra in ugual modo che

$$MA.MB = OA^2 - OM^2$$

e poichè $OC = OA$ ed anche $OC^2 = OA^2$ si conclude

$$MC.MD = MA.MB$$

OSSERVAZIONE. I detti rettangoli equivalgono al quadrato nella semicorda minima, perchè questa è dimezzata in M (n. 140 Osserv.).

2.º CASO. Sia la circonferenza O (fig. 121) ed M un punto esterno pel quale sieno condotte due secanti MAB, MCD. Dico che

$$MA.MB = MC.MD.$$

Infatti conducasi OP perpendicolare alla AB. Si ha
 $MA.MB = (MP - PA).(MP + PB)$
 ossia per essere $PA = PB$.

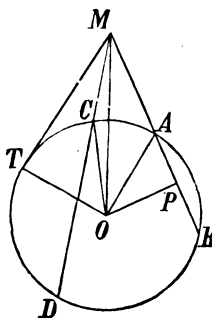


Fig. 121.

$$MA.MB = (MP - PA).(MP + PA)$$

ed anche

$$MA.MB = MP^2 - PA^2$$

ed aggiungendo e togliendo OP^2 ,

$$MA.MB = (MP^2 + OP^2) - (PA^2 + OP^2)$$

ed ancora

$$MA.MB = OM^2 - OA^2.$$

Per l'altra secante si dimostra in egual modo che

$$MC.MD = OM^2 - OC^2$$

e poichè $OC = OA$ ed anche $OC^2 = OA^2$, si conclude
 $MA.MB = MC.MD$.

OSSERVAZIONE. Se si conduce la tangente MT , si dimostra che i detti rettangoli equivalgono al quadrato della tangente MT . Infatti dal triangolo rettangolo OMT si ha che

$$MT^2 = OM^2 - OT^2 = OM^2 - OA^2$$

dunque

$$MA.MB = MT^2.$$

COROLLARIO. *Di tutti i rettangoli equivalenti il quadrato ha il minimo perimetro.*

Infatti nella fig. 120 le corde passanti per M rappresentano i semiperimetri di rettangoli equivalenti, e la minima è appunto quella dimezzata in M .

Reciprocamente

1.° TEOREMA. *Date due rette AB , CD concorrenti in M , se il rettangolo dei segmenti MA , MB presi sulla prima da bande opposte di M (fig. 120), o dalla stessa banda (fig. 121), equivale al rettangolo dei segmenti MC , MD presi allo stesso modo sulla seconda, i quattro punti A , B , C , D sono sopra una circonferenza.*

Infatti se la circonferenza dei tre punti A , B , C incontrasse la MD in un punto D' , si avrebbe

$$MA.MB = MC.MD',$$

Ma per ipotesi

$$MA.MB = MC.MD$$

epperò

$$MC.MD' = MC.MD.$$

il che è assurdo, se D' non coincide con D .

2.° TEOREMA. *Date due rette MT , MAB concorrenti in M (fig. 121), se il quadrato del segmento MT preso*

sulla prima equivale al rettangolo dei segmenti MA , MB presi sulla seconda dalla stessa banda del punto M , la circonferenza dei tre punti T , A , D è tangente in T alla MT .

Infatti se la circonferenza TAB non fosse tangente in T alla MT , la dovrebbe incontrare in un altro punto T' e pel Teor. 219 si avrebbe:

$$MT.MT' = MA.MB.$$

Ma per ipotesi

$$MT^2 = MA.MB,$$

perciò

$$MT^2 = MT.MT';$$

il che è assurdo, se T' non coincide con T .

220. In due triangoli cogli angoli eguali ciascuno a ciascuno si dicono *corrispondenti* i lati opposti ad angoli eguali.

TEOREMA. Se due triangoli hanno gli angoli rispettivamente eguali, il rettangolo di un lato dell'uno

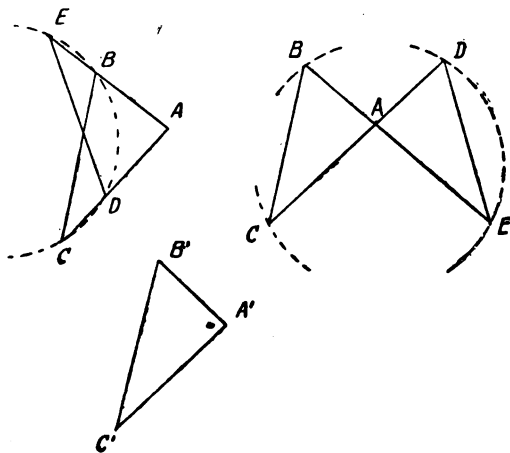


Fig. 122.

e di un lato non corrispondente dell'altro equivale al rettangolo dei loro corrispondenti ⁽¹⁾.

Sieno i due triangoli ABC , $A'B'C'$ (fig. 122) e sia $\widehat{A} = \widehat{A'}$ e $\widehat{B} = \widehat{B'}$, da cui $\widehat{C} = \widehat{C'}$. Dico che $AB.A'C' = AC.A'B'$.

Si prenda sopra AC (o sul prolungamento) $AD = A'B'$ e sopra AB (o sul prolungamento) $AE = A'C'$ e si conduca DE : il triangolo ADE sarà eguale al triangolo $A'B'C'$. Ciò posto, per essere $\widehat{C} = \widehat{E}$ è chiaro che i quattro punti B, C, E, D sono sopra una circonferenza (n. 149 e 164), perciò (n. 219)

$$AB.AE = AC.AD, \text{ ossia } AB.A'C' = AC.A'B'.$$

OSSERVAZIONE. Se due lati non corrispondenti come AC , $A'B'$ fossero eguali, si avrebbe $AB.A'C' = AC^2$.

221. TEOREMA. *In un triangolo il rettangolo di due lati equivale alla somma del quadrato della bisettrice concorrente con essi e del rettangolo dei segmenti in cui vien diviso il terzo lato.*

Sia ABC un triangolo (fig. 123); AD la bisettrice dell'angolo $\widehat{A}$; dico che

$$AB.AC = AD^2 + BD.DC$$

Si circoscriva la circonferenza al triangolo, si prolunghi AD ad incontrare la circonferenza in E e si conduca BE . I triangoli ABE , ADC sono equiangoli, perchè $\widehat{BAE} = \widehat{DAC}$, ed $\widehat{AEB} = \widehat{ACD}$ (n. 149); perciò

$$AB.AC = AE.AD$$

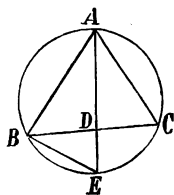


Fig. 123.

⁽¹⁾ Questo teorema è noto anche col nome di *teorema di De Paolis* (Vedi nota a pag. 15).

ma $AE = AD + DE$; perciò (n. 209)

$$AE \cdot AD = AD^2 + AD \cdot DE$$

ma (n. 219) $AD \cdot DE = BD \cdot DC$, perciò sostituendo

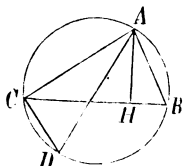
$$AE \cdot AD = AD^2 + BD \cdot DC$$

ed infine

$$AB \cdot AC = AD^2 + BD \cdot DC.$$

222. TEOREMA. *In un triangolo il rettangolo di due lati equivale al rettangolo dell'altezza che corre nello stesso vertice e del diametro del cerchio circoscritto.*

Sia ABC il triangolo (fig. 124): si circoscriva la circonferenza e si conduca l'altezza AH e il diametro AD ; dico che



$$AB \cdot AC = AD \cdot AH$$

Infatti si unisca C con D ; i due triangoli ACD , AHB sono equiangoli, perchè rettangoli l'uno in C (n. 149, Cor. 2.^o) e l'altro in H ; di più $\widehat{ABH} = \widehat{ADC}$ (n. 149). Dunque pel teor. 220 è vero che

$$AB \cdot AC = AD \cdot AH$$

223 TEOREMA (di Tolomeo) ⁽¹⁾. *Se un quadri-*

Fig. 124.

(1) Claudio Tolomeo, geometra ed astronomo alessandrino, nato verso il 125 dell'Era volgare. Tra le varie sue opere citiamo le più importanti: un trattato di trigonometria rettilinea e sferica con applicazioni all'astronomia, il più antico che ci sia pervenuto, detto in seguito con parola araba l'*Almagesto*; il teorema sopracitato ne è uno dei fondamenti; la dottrina della *proiezioni*, di cui diede i fondamenti e che applicò alla costruzione delle carte geografiche ed alla gnomonica. In entrambe queste opere sembra però siano riportate anche scoperte di Ipparco, il più grande astronomo dell'antichità, vissuto quasi tre secoli prima, e le cui opere andarono perdute.

Finalmente un trattato intitolato *Optice*, dove tratta celebri questioni di ottica matematica.

latero è iscritto in un cerchio, il rettangolo delle diagonali equivale alla somma dei rettangoli dei lati opposti.

Sia ABCD un quadrilatero iscritto (fig. 125) e sieno AC, BD le diagonali; dico che

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

Infatti si formi in A con AB l'angolo $\widehat{BAE} = \widehat{DAC}$ (E è il punto d'incontro di AE con BD). I due triangoli ABE, ACD sono equiangoli, perchè $\widehat{BAE} = \widehat{DAC}$ e $\widehat{ABE} = \widehat{ACD}$ (n. 149), perciò

$$AB \cdot CD = AC \cdot BE$$

Similmente i triangoli AED, ABC sono equiangoli, perchè $\widehat{EAD} = \widehat{BAC}$ e $\widehat{ADE} = \widehat{ACB}$ (n. 149), perciò

$$AD \cdot BC = AC \cdot ED,$$

ed addizionando le due equivalenze

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BE + AC \cdot ED$$

ma

$AC \cdot BE + AC \cdot ED = AC \cdot (BE + ED) = AC \cdot BD$
perciò sostituendo

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$

OSSERVAZIONE. Se il quadrilatero è rettangolo, la relazione diventa

$$AB^2 + AD^2 = BD^2$$

cioè si ricade nel teorema di Pitagora.

§ 5.° Alcuni problemi.

224. PROBLEMA. Costruire un quadrato equivalente alla somma di due o più quadrati.

Se a , b sono i lati di due quadrati, l'ipotenusa

del triangolo rettangolo, i cui cateti sono eguali ad a ed a b , è il lato del quadrato richiesto (n. 204).

Se i quadrati dati sono più di due, si trova il lato del quadrato equivalente alla somma dei primi due; poi il lato del quadrato equivalente alla somma di quello trovato e del terzo, e così di seguito fino all'ultimo.

225. PROBLEMA. *Costruire un quadrato che sia*

1.° *multiplo di un quadrato dato;*

2.° *summultiplo di un quadrato dato;*

3.° *multiplo d' un summultiplo di un quadrato dato.*

1.° Sia a il lato del quadrato e si voglia trovare il lato del quadrato equivalente a $5a^2$. Se si costruiscono cinque quadrati eguali ad a^2 ed adiacenti, come è indicato nella fig. 126a,

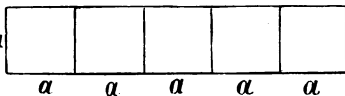


Fig. 126a.

è chiaro che la loro somma equivale al rettangolo che ha per lati a e $5a$; per cui la questione è ridotta a trasformare questo rettangolo in un quadrato (n. 205 o n. 215).

2.° Per costruire un summultiplo di un quadrato dato, per es. la quinta parte, si dividano in cinque parti eguali due lati opposti del quadrato (fig. 126b) e si uniscano i punti di divisione corrispondenti. Il quadrato viene così decomposto in cinque rettangoli eguali. La questione è così ridotta a trasformare uno di questi rettangoli in un quadrato (n. 205 o 215).

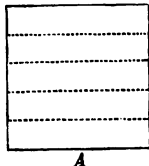


Fig. 126b.

3.° Per costruire un multiplo di un summul-

tiplo, per es. i $\frac{7}{5}$ d'un quadrato dato, se ne trova prima la quinta parte (2°); si sommano 7 di queste quinte parti (1°) e si trasforma il rettangolo ottenuto in un quadrato (n. 205 o 215).

226. PROBLEMA. *Costruire un quadrato equivalente alla differenza di due quadrati.*

Se a, b sono i lati dei due quadrati ed $a > b$, il cateto del triangolo rettangolo, di cui l'ipotenusa è eguale ad a e l'altro cateto a b , è il lato del quadrato.

227. PROBLEMA. *Costruire un rettangolo data la somma di due lati consecutivi ed il quadrato equivalente.*

Sia a il lato del quadrato equivalente al rettangolo cercato e p la somma di due lati consecutivi. Si prenda $AB = p$ (fig. 127) e sopra AB come diametro si descriva una semicirconferenza,

il cui centro sia O . Da un punto della AB , per es. O , si eleui la perpendicolare ad AB e su questa si prenda un segmento $OC = a$: da C si conduca la parallela ad AB ad incontrare la semicirconferenza in un punto D ; dal punto D si abbassi la perpendicolare DE sulla AB . I segmenti AE, BE sono i lati del rettangolo cercato:

Infatti:

$$AE + EB = AB = p; \text{ e } AE \cdot EB = DE^2 = OC^2 = a^2.$$

OSSERVAZIONE. Perchè il problema abbia soluzione è necessario che DE , cioè a , non superi il raggio del cerchio, cioè $\frac{1}{2} p$: in altre parole il ret-

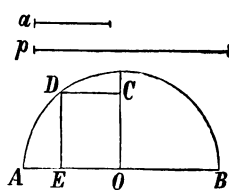


Fig. 127.

tangolo non può superare il quadrato di $\frac{1}{2}p$. Per $a = \frac{1}{2}p$ i lati del rettangolo sono eguali ad $\frac{1}{2}p$, ed il rettangolo è massimo. Si ha dunque:

TEOREMA. *Di tutti i rettangoli che hanno eguale perimetro il quadrato è massimo.*

Per $a > \frac{1}{2}p$ il problema è impossibile.

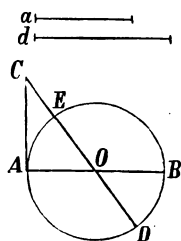


Fig. 128.

228. PROBLEMA. *Costruire un rettangolo data la differenza di due lati consecutivi ed il lato del quadrato equivalente.*

Sia a il lato del quadrato equivalente al rettangolo, e d la differenza dei lati. Preso $AB = d$ (fig. 128), sopra AB come diametro descrivasi la circonferenza, il cui centro sia O . Si conduca da A la tangente alla circonferenza, e si prenda su di essa $AC = a$: si tracci la CO , la quale incontri la circonferenza nei punti D ed E . I segmenti CD , CE sono i lati del rettangolo cercato.

Infatti

$$CD - CE = ED = AB = d:$$

di più: (n. 219, 2.º caso),

$$a^2 = CA^2 = CD.CE.$$

OSSERVAZIONE. Il problema è sempre possibile.

229. PROBLEMA. *Dividere un segmento in sezione aurea, oppure in media ed estrema ragione: cioè dividere un segmento in due parti tali, che il quadrato di una di queste (la maggiore) sia equivalente al rettangolo dell'altra e dell'intero segmento.*

Sia AB il segmento dato (fig. 129): si costruisca il triangolo ABC rettangolo in B e col cateto $BC = \frac{1}{2} AB$; cen-

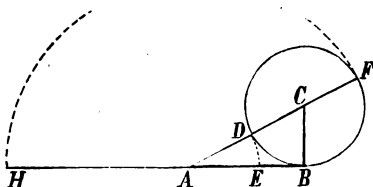


Fig. 129.

tro in C e raggio CB , si descriva la circonferenza, che incontri AC in D : sopra AB si prenda $AE = AD$; dico che AB è diviso in E in sezione aurea, cioè che:

$$AE^2 = AB.EB.$$

Infatti si prolunghi AC ad incontrare nuovamente la circonferenza in F ; si avrà (n. 219, 2.º Caso)

$$AB^2 = AF.AD:$$

ora

$AF = AD + DF$, $AD = AE$, $DF = AB$,
perciò la relazione diventa:

$$AB^2 = (AE + AB).AE$$

ossia (n. 209):

$$AB^2 = AE^2 + AB.AE.$$

da cui

$$AE^2 = AB^2 - AB.AE$$

ed anche (n. 210)

$$AE^2 = AB.(AB - AE)$$

o finalmente

$$AE^2 = AB.EB.$$

OSSERVAZIONE 1.^a Il segmento AF è diviso in D in sezione aurea, perchè (essendo $AB = DF$):

$$DF^2 = AF.AD.$$

È così risolto il problema:

Trovare un segmento diviso in sezione aurea, data la parte maggiore (AB).

Il segmento cercato è AF.

OSSERVAZIONE 2.^a Se si trasporta sul prolungamento di AB a partire da A il segmento AH = AF, il segmento BH è diviso in A in sezione aurea, perchè: $AH^2 = BH.AB$.

Infatti dalle due equivalenze

$$AB^2 = AD.AF, \quad AF.AB = AF.DF$$

addizionando si ha

$$AB^2 + AF.AB = AD.AF + AF.DF$$

ossia

$$AB.(AB + AF) = AF.(AD + DF)$$

ma

$AB + AF = AB + AH = BH$, $AD + DF = AF = AH$:
sostituendo

$$AB.BH = AH^2.$$

È così risolto il problema:

Trovare un segmento diviso in sezione aurea, data la parte minore (AB).

Il segmento cercato è BH.

OSSERVAZIONE 3.^a Il segmento AF è diviso in sezione aurea in D e sul segmento AB eguale alla parte maggiore DF avendo portato la parte minore AD in AE, AB è diviso in E in sezione aurea; perciò:

Se un segmento è diviso in sezione aurea e si trasporta la parte minore sulla maggiore, questa rimane divisa in sezione aurea (1).

(1) Si può dimostrare anche direttamente così: la relazione $AE^2 = AB.EB$ si può scrivere: $AE^2 = (AE + EB).EB$, ossia: $AE^2 = AE.EB + EB^2$, da cui $EB^2 = AE^2 - AE.EB$, od ancora: $EB^2 = AE.(AE - EB)$: la quale dice che EB è eguale alla parte maggiore del segmento AE diviso in sezione aurea.

230. PROBLEMA. *Costruire un angolo eguale alla quinta parte di un angolo piatto.*

Sia AB un segmento qualunque (fig. 130): lo si divida in sezione aurea in C, in modo cioè che $AC^2 = AB \cdot CB$: si costruisca sopra CB, come base, il triangolo isoscele CDB tale che $CD = DB = CA$; conducasì DA. L'angolo $\widehat{DAB}$ è la quinta parte di un angolo piatto.

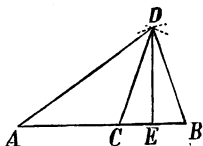


Fig. 130.

Infatti condotta la DE perpendicolare a CB, dal triangolo ABD acutangolo in B si ha (n. 212):

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2BE \cdot AB$$

ma $2BE = BC$ e $BD = AC$: sostituendo si ha

$$AD^2 = AB^2 + AC^2 - AB \cdot BC$$

ed essendo $AC^2 = AB \cdot BC$, si ha infine $AD^2 = AB^2$, da cui $AD = AB$. Allora nel triangolo ABD si avrà: $\widehat{ABD} = \widehat{ADB}$: ma $\widehat{ABD} = \widehat{BCD}$ e $\widehat{BCD}$, essendo esterno al triangolo isoscele ABC, è doppio di $\widehat{DAB}$: perciò anche gli angoli $\widehat{ADB}$ e $\widehat{ABD}$ sono doppi di $\widehat{DAB}$. Ne consegue che la somma dei tre angoli del triangolo ABD (eguale ad un angolo piatto) equivale a cinque volte $\widehat{DAB}$: dunque $\widehat{DAB}$ è la quinta parte di un angolo piatto.

Sebbene estranei all'argomento aggiungiamo i due problemi seguenti, i quali (con altri che verranno in seguito), mostrano l'importanza del teorema n. 219.

231. PROBLEMA. *Descrivere una circonferenza passante per due punti dati e tangente ad una retta data.*

Sieno A, B i punti dati (fig. 131) ed MP la retta data. Si conduca la AB che incontri in M la retta

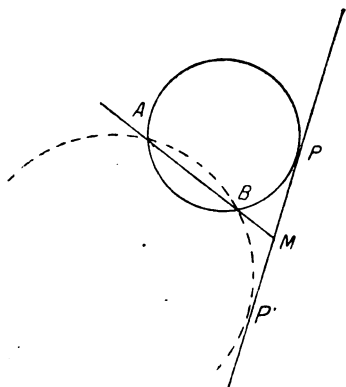


Fig. 131.

data: si trovi colla nota costruzione (n. 205 o 215) il segmento MP tale che

$$MP^2 = MA \cdot MB$$

La circonferenza dei tre punti A, B, P è la cercata. Infatti questa pel reciproco del teorema 219 è tangente in P alla MP.

Il problema ammette due soluzioni, perchè preso sulla retta il segmento $MP' = MP$ dalla banda opposta, anche la circonferenza A, B, P' è soluzione del problema.

Se la AB è parallela alla MP si conduca dal punto medio di AB la perpendicolare alla MP ad incontrarla in C. La circonferenza A, B, C è soluzione del problema, ed è l'unica.

Non vi sono soluzioni se i punti A e B sono da bande opposte della retta data.

232. PROBLEMA. *Descrivere una circonferenza passante per due punti dati e tangente ad una circonferenza data.*

Sia C la circonferenza data (fig. 132) ed A, B i punti dati ed esterni ad essa. Si descriva una circonferenza passante per i punti A, B e per un punto interno alla circonferenza C, la quale incontrerà la C

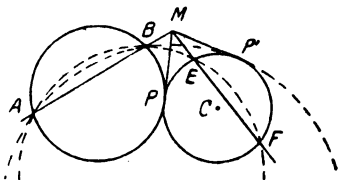


Fig. 132.

in due punti; sieno E, F. Si conducano AB ed EF, le quali si incontrino in M: da M si conduca una tangente MP alla circonferenza C. La circonferenza dei tre punti A, B, P è la cercata.

Infatti pel teor. 219 (2.º caso, Osserv.)

$$MP^2 = ME.MF$$

ma pel teorema 219

$$ME.MF = MA.MB$$

perciò

$$MP^2 = MA.MB$$

da cui si deduce che la circonferenza A, B, P è tangente in P alla MP e perciò anche alla circonferenza C.

Conducendo da M l'altra tangente MP' alla C, la circonferenza A, B, P' è una seconda soluzione del problema.

OSSERVAZIONE. Se le AB, EF fossero parallele, si conduce una tangente alla C parallela alla AB (n. 163): il suo punto di contatto insieme ai punti A, B determinano una soluzione del problema. Anche in questo caso le soluzioni sono due.

Se i punti fossero interni alla circonferenza C si procede in modo analogo. Se un punto è interno alla C e l'altro esterno non vi sono soluzioni.

CAPITOLO V.

MISURA DELLE GRANDEZZE - GRANDEZZE PROPORZIONALI

§ 1.° Grandezze commensurabili ed incommensurabili.

233. Le grandezze, delle quali si tratta in questo capitolo, devono soddisfare alle condizioni indicate al n. 67 e segg., come quelle finora studiate: e siccome si considera in esse la sola estensione (non si bada cioè alla *figura*) la parola *eguale* va intesa qui nel significato di *equivalente*.

234. Una grandezza A si dice *doppia*, *tripla*.... *mpla* di un'altra B , o *moltiplica di B* secondo il numero 2, 3,... m , quando A si può considerare come la somma di 2, 3,... m grandezze eguali a B , e si scrive: $A = 2B, 3B$ mB . La B si dice invece la *metà*, la *terza parte*,... la m^a *parte di A*, o *summultipla*, o *parte aliquota di A secondo il numero 2, 3,... m*, e si scrive: $B = \frac{1}{2}A, \frac{1}{3}A$ $\frac{1}{m}A$.

Se $A = B$, A è multipla o summultipla di B secondo il numero 1.

Da queste definizioni risulta:

1.° $A = n \cdot \frac{1}{n}A$ ed anche $A = \frac{1}{n} \cdot nA$.

2.° Se $A = mB$ e $B = nC$, sarà $A = mnC$.

Se $C = \frac{1}{n}A$ e $B = \frac{1}{m}A$, sarà

$$C = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m} A = \frac{1}{mn} A.$$

Se $A = mB$ e $B = \frac{1}{n}C$, sarà $A = \frac{m}{n}C$.

3° Se $A = \frac{1}{n}B$, sarà

$$mnA = mn \cdot \frac{1}{n} B = mB \text{ (n. 70, Cor. 4.º).}$$

Se $A = nB$, sarà

$$\frac{1}{mn} A = \frac{1}{mn} nB = \frac{1}{m} B \text{ (n. 70, Cor. 4.º).}$$

225. Più grandezze $A, B...$ si dicono *equimultiple* (*equisummultiple*) di altre $A', B', ...$, se le prime sono multiple (summultiple) rispettivamente di queste secondo lo stesso numero; cioè se:

$$A = mA', \quad B = mB'... \left(A = \frac{1}{m}A', \quad B = \frac{1}{m}B'... \right),$$

È chiaro che se $A' \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} B'$, anche $A \begin{smallmatrix} < \\ = \\ > \end{smallmatrix} B$ e re-

ciprocamente (n. 71, 4.º e 7.º Cor.),

236. Di una grandezza A si può trovare la multipla secondo qualunque numero, perchè si possono addizionare quante si vogliono grandezze eguali ad A . Lo stesso non può dirsi della summultipla secondo qualunque numero, la quale si sa trovare solamente secondo numeri particolari.

Si vedrà però in seguito come debbasi conce-

pire tale summultipla, quando non si sappia costruire ⁽¹⁾.

237. Le *successive* multiple di una grandezza A cioè; A , $2A$, $3A$, $4A$... formano una serie di grandezze che si dice *crescente*, perchè ciascuna grandezza è maggiore della precedente, ossia

$$A < 2A < 3A < 4A \dots$$

La serie stessa cresce *illimitatamente*, cioè tra le grandezze A , $2A$, $3A$... ve n'è sempre una maggiore di una grandezza omogenea assegnata qualsiasi B .

Questo in altre parole non è altro che il principio di Archimede (n. 72).

238. Le *successive* summultipla di una grandezza A , cioè A , $\frac{1}{2} A$, $\frac{1}{3} A$... formano una serie di grandezze che si dice *decrescente*, perchè ciascuna grandezza è minore della precedente, ossia

$$A > \frac{1}{2} A > \frac{1}{3} A > \frac{1}{4} A \dots$$

La serie stessa decresce *illimitatamente*, cioè tra le grandezze A , $\frac{1}{2} A$, $\frac{1}{3} A$... ve n'è una minore di qualsiasi grandezza omogenea assegnata B . In altre parole date due grandezze diseguali $A > B$ esiste una summultipla della maggiore A inferiore all'altra. Infatti si formi la serie B , $2B$, $3B$...; fra

(1) Vedasi in proposito la nota a pag. 190. Quanto è detto in questo capitolo vale per le grandezze di cui è assegnabile la summultipla secondo qualunque numero: perciò è da ritenersi generale solo dopo che si sarà definita la summultipla secondo qualunque numero anche per quelle grandezze che fanno eccezione.

queste grandezze (per quanto sopra si è detto) ve ne sarà una maggiore della A ; sia questa mB . Si avrà dunque $A < mB$, od anche (prendendo le equisummultiple secondo m) $\frac{1}{m} A < B$.

239. Una grandezza si dice *comune multipla* o *comune summultipla* di altre grandezze, quando è multipla o summultipla di ciascuna di queste. Per esempio la grandezza A è comune multipla delle grandezze $\frac{1}{m}A$, $\frac{1}{n}A$, ed è comune summultipla delle grandezze mA , nA .

240. TEOREMA. *Se due grandezze hanno una comune summultipla, hanno anche una comune multipla e reciprocamente.*

Se C è comune summultipla di A e di B , cioè

$$C = \frac{1}{m}A \text{ e } C = \frac{1}{n}B,$$

è chiaro che mnC è comune multipla di A e di B , perchè

$$mnC = mn \frac{1}{m}A = nA$$

od anche

$$mnC = mn \frac{1}{n}B = mB.$$

Così pure se D è comune multipla di A e di B , cioè $D = mA$ e $D = nB$, si ha che $\frac{1}{mn} D$ è comune summultipla di A e di B ; perchè

$$\frac{1}{mn} D = \frac{1}{mn} mA = \frac{1}{n} A,$$

ed anche

$$\frac{1}{mn} D = \frac{1}{mn} nB = \frac{1}{m} B.$$

241. TEOREMA. *Se due grandezze A , B hanno una comune multipla (summultipla) C , ne hanno infinite.*

Infatti le multiple (summultiple) di C sono anche multiple (summultiple) di A e di B .

242. Due grandezze che hanno una comune summultipla si dicono *commensurabili*.

243. TEOREMA. *Se una grandezza C è summultipla di A e di B , è summultipla anche di $A + B$ e di $A - B$ (posto $A > B$).*

Infatti se $A = mC$ e $B = nC$ sarà

$$A + B = (m + n)C$$

ed

$$A - B = (m - n)C.$$

In particolare poi se C è summultipla di A , è summultipla di $2A$, $3A$...

244. Tra le summultiple comuni a due grandezze è utile talvolta conoscere la più grande, che dicesi appunto *massima comune summultipla* (m. c. s.) La ricerca della medesima si fa col processo della *divisione*.

245. *Dividere una grandezza A per un'altra non maggiore B* significa sottrarre la grandezza B dalla A quante volte è possibile, ossia cercare quante volte la A contiene la B . Possono darsi due casi: o che colla ripetuta operazione si esaurisca la grandezza A , il che avviene se A è multipla di B , ed allora si dice che la B *divide* la A ; o che rimanga una grandezza R minore di A , che dicesi il *resto* della divisione.

246. La ricerca della m. c. s. di due grandezze A e B si fonda sui teoremi seguenti:

1.° TEOREMA. *Se la grandezza A è multipla della B , la m. c. s. di A e di B è la B .*

Infatti la B è summultipla di sè stessa ed è summultipla della A per ipotesi: d'altra parte è la massima, perchè una grandezza maggiore di B non può essere summultipla della B .

2.° TEOREMA. *Se la grandezza A non è multipla della B (posto $A > B$) la m. c. s. di A e di B è anche la m. c. s. della minore B e del resto della divisione di A per B .*

Infatti si divida A per B e sia R il resto; cioè si abbia $A = mB + R$. Ogni grandezza che divide B ed R , divide mB ed R , e perciò anche $mB + R$ (n. 243), cioè A ; ed ogni grandezza che divide A e B , divide A ed mB , ed anche $A - mB$, cioè R (n. 243); perciò le due coppie di grandezze A , B e B , R hanno le stesse summultiple comuni, e la massima tra queste è la medesima per le due coppie.

247. Date ora due grandezze A e B per trovarne la m. c. s. (posto $A > B$), si divida A per B : se non vi è resto, la B è la m. c. s.; se vi è un resto R , si divida B per R ; se non vi è resto, R è la m. c. s. di B e di R e perciò anche di A e di B ; se vi è un nuovo resto R' , si divida R per R' . Così continuando: *se si giunge ad un resto che divida il precedente, questo è la m. s. c. cercata, e le due grandezze A e B sono commensurabili.*

OSSERVAZIONE. Da quanto precede si deduce ancora che:

1.° *L'ultimo resto, cioè la m. c. s., divide tutti i resti precedenti oltre A e B .*

2.° *Ogni summultipla di A e di B è anche summultipla della loro m. c. s.*

248. Reciprocamente:

Se due grandezze A e B sono commensurabili, col procedimento delle successive divisioni si deve giungere ad un resto che divida il precedente.

Infatti sieno $R, R', R'', R'''\dots$ i successivi resti ottenuti: le grandezze $A, B, R, R', R'', R'''\dots$ formano una serie decrescente: di più per essere $R < B$ è anche

$$2R < B + R;$$

e poichè $B + R \overline{<} A$, anche $2R < A$, da cui

$$R < \frac{1}{2} A,$$

cioè il resto di una divisione è minore della metà del dividendo. Per la stessa ragione

$$R' < \frac{1}{2} B, \quad R'' < \frac{1}{2} R,$$

ed anche (per essere $\frac{1}{2} R < \frac{1}{4} A$)

$$R'' < \frac{1}{4} A;$$

così

$$R''' < \frac{1}{2} R' < \frac{1}{4} B, \text{ ecc....}$$

Ora la serie $\frac{1}{2}A, \frac{1}{2}B, \frac{1}{4}A, \frac{1}{4}B, \dots$ o per

meglio dire le due serie $\frac{1}{2}A, \frac{1}{4}A, \dots$ ed $\frac{1}{2}B, \frac{1}{4}B, \dots$,

di cui è formata la prima, decrescono illimitatamente. Difatti se si confronta una di esse per es.

$$\frac{1}{2}A, \frac{1}{4}A, \frac{1}{8}A, \dots$$

colla serie $\frac{1}{2}A, \frac{1}{3}A, \dots$

è chiaro che i termini della prima (a partire dal secondo) sono minori dei corrispondenti della seconda, e poichè questa decresce illimitatamente (n. 238) lo stesso avviene anche della prima.

Così dicasi della serie $\frac{1}{2}B, \frac{1}{4}B, \dots$

Ciò posto siccome la serie $\frac{1}{2}A, \frac{1}{2}B, \frac{1}{4}A, \frac{1}{4}B, \dots$ decresce illimitatamente, anche la serie $R, R', R'', R''' \dots$ composta di grandezze minori rispettivamente delle prime, ove non finisse, decrescerebbe illimitatamente. Ma ciò non può essere, perchè, detta M la m. c. s. di A e B , si potrebbe giungere ad un resto $R^{(n)}$ minore di M , mentre la M è summultipla di tutti i resti (vedi Oss. n. 247). Dunque la serie deve terminare; o in altre parole si deve giungere ad un resto che divida il precedente.

Date ora due grandezze A e B , se col processo delle successive divisioni non si giunge mai ad un resto che divida il precedente, si deve concludere che le due grandezze A e B non hanno summultiple comuni e perciò neppure multiple comuni, poichè se ne avessero, il procedimento dovrebbe terminare.

249. Due grandezze, che non hanno summultiple comuni, diconsi *incommensurabili*. Ad es.:

1.° TEOREMA. *Un segmento e la parte maggiore del segmento diviso in sezione aurea sono incommensurabili.*

Infatti si è notato (n. 229, Oss. 3^a), che por-

$$A = mC \quad \text{e} \quad B = nC:$$

si deduce:

$$C = \frac{1}{n}B \quad \text{ed} \quad A = \frac{m}{n}B.$$

Se fosse già nota una comune summultipla C' e fosse:

$$A = m'C' \quad \text{e} \quad B = n'C',$$

si dedurrebbe nello stesso modo:

$$A = \frac{m'}{n'}B.$$

Si può mostrare che i due numeri $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}$ hanno lo stesso valore.

Infatti la C' , come summultipla di A e di B , è summultipla di C (n. 247 Osserv. 2.^a): sia per es. $C = pC'$: allora dalle prime due eguaglianze e dal n. 234, 2.^o) si ha:

$$A = mpC' \quad \text{e} \quad B = npC',$$

perciò: $m' = mp$ e $n' = np$:

e dividendo membro a membro:

$$\frac{m'}{n'} = \frac{mp}{np} = \frac{m}{n} \quad (1).$$

Adunque;

1.^o TEOREMA. *Se A e B sono grandezze commensurabili, esiste un numero ed uno solo, che esprima la misura di A rispetto a B .*

OSSERVAZIONE. 1.^a Se A è multipla di B , cioè

(1) Si può osservare che i termini della frazione $\frac{m}{n}$ sono primi tra loro, perchè se avessero un fattor comune q , cioè fosse $m = rq$, $n = sq$, e perciò $A = rqC$ e $B = sqC$. la grandezza $qC > C$ dividerebbe A e B , il che non può essere, perchè C è la loro m. c. s.

$A = mB$, la misura di A è data da un numero intero m ; ed in particolare dall'unità, se $A = B$.

OSSERVAZIONE 2.^a Se $\frac{m}{n}$ è la misura di A rispetto a B , è chiaro che $\frac{n}{m}$ è la misura di B rispetto ad A .

I numeri interi e frazionari, rappresentando le misure di grandezze commensurabili coll'unità di misura, diconsi *numeri commensurabili o razionali*.

2.^o Reciprocamente:

TEOREMA. *Data una grandezza B come unità di misura, per ogni numero commensurabile k esiste una grandezza ed una sola, di cui il numero k è la misura.*

Infatti se $k = \frac{m}{n}$, si può costruire ⁽¹⁾ la grandezza $\frac{1}{n} B$ ed anche la $\frac{m}{n} B$, che è la cercata, e questa è unica.

252. Se le grandezze A e B sono fra loro incommensurabili, non esiste alcun numero (intero o frazionario) che possa esprimere il valore dell'una rispetto all'altra. Perciò o rinunciarvi senz'altro ⁽²⁾, od ammettere, come si è fatto, che oltre gli interi ed i frazionari esista un'altra specie di numeri atti appunto a

⁽¹⁾ S'intende che questo vale (per ora) per quelle grandezze delle quali si può costruire la summultipla secondo qualunque numero.

⁽²⁾ Vedasi quanto dice a proposito dei numeri irrazionali il prof. G. ASCOLI nella sua nota: *I fondamenti dell'Algebra*. — « Rendiconti R. Istituto Lombardo », Vol. XXVIII, Serie 2.^a, Anno 1895.

rappresentare il valore di una grandezza A incommensurabile coll'unità di misura B . Questi numeri detti irrazionali od incommensurabili, sono oggetto di un capitolo speciale dell'aritmetica.

E della misura delle grandezze incommensurabili ci occuperemo in seguito, dopo aver esposte alcune nozioni sui limiti.

Per ora osserviamo che se A è incommensurabile con B , presa della B una summultipla $\frac{1}{n} B$

e divisa A per $\frac{1}{n} B$, si avrà: $A = \frac{m}{n} B + R$,

da cui $\frac{m+1}{n} B > A > \frac{m}{n} B$.

Le frazioni $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m}{n}$ si dicono *valori approssimati* della A a meno di $\frac{1}{n}$ ($\frac{1}{n}$ è il grado di approssimazione), la prima *per eccesso*, la seconda *per difetto*: volendo dire con questo che dette frazioni sono i valori di grandezze $(\frac{m+1}{n} B, \frac{m}{n} B)$ commensurabili coll'unità di misura B e che differiscono da A di meno di $\frac{1}{n} B$, la prima in più, la seconda in meno. Ed è chiaro che coll'ingrandire opportunamente il numero n si potrà far sì che l'errore commesso sostituendo ad A una delle due grandezze $\frac{m+1}{n} B$, o $\frac{m}{n} B$ (come si fa in pratica) sia piccolo quanto si vuole.

253. TEOREMA. *Se la grandezza A è misurata*

rispetto alla B e la B rispetto ad una terza C, la misura di A rispetto a C è il prodotto della misura di A (rispetto a B) per quella di B (rispetto a C).

Se

$$A = \frac{m}{n} B \quad \text{e} \quad B = \frac{p}{q} C,$$

dico che:

$$A = \frac{mp}{nq} C.$$

Infatti dall'ipotesi si deduce:

$$nA = mB \quad \text{e} \quad qB = pC$$

e prendendo le multiple secondo q ed m rispettivamente:

$$nqA = mqB, \quad \text{e} \quad mqB = mpC,$$

da cui:

$$nqA = mpC$$

e finalmente:

$$A = \frac{mp}{nq} C.$$

COROLLARIO. Se $A = \frac{m}{n} B$, $B = \frac{p}{q} C$,

$C = \frac{r}{s} D$ sarà:

$$A = \frac{mpr}{nqs} D$$

e così via.

ESEMPIO. Il palmo napoletano equivale ad $\frac{1}{7000}$ del miglio geografico, questo equivale a 1852 metri, ed il metro equivale a $\frac{200}{119}$ del braccio milanese, dunque:

$$\text{Palmo nap.} =: \left(\frac{1}{7000} \times 1852 \times \frac{200}{119} \right) \text{Br. mil.}$$

ossia

$$\text{Palmo nap.} = \frac{1852}{4165} \text{Br. mil.}$$

254. TEOREMA. *Se due grandezze A e B sono misurate rispetto ad una terza C, la misura di A rispetto a B è il quoziente della misura di A per quella di B.*

Se

$$A = \frac{m}{n} C \quad \text{e} \quad B = \frac{p}{q} C$$

dico che:

$$A = \left(\frac{m}{n} : \frac{p}{q} \right) B,$$

ossia:

$$A = \frac{mq}{np} B.$$

Infatti essendo $B = \frac{p}{q} C$, è $C = \frac{q}{p} B$ (n.

234 oss. 2.^a) e pel teorema precedente:

$$A = \frac{mq}{np} B.$$

ESEMPIO. Il piede inglese equivale a 0,305 del metro e il braccio milanese a 0,595 del metro, dunque:

$$\text{Piede inglese} = \frac{305}{595} \text{Braccio milanese.}$$

Questi teoremi servono a cambiare l'unità di misura.

§ 3.° Classi e serie di grandezze.

Grandezze limiti.

255. *Classe* di grandezze (inteso nel senso più generale) è un insieme di grandezze della medesima natura. Ad es. i segmenti formano una classe; così gli angoli, i poligoni... sono altrettante classi.

Più grandezze di una classe possono soddisfare a una stessa condizione: in tal caso si dice che esse formano ancora una classe, che è *parte* di una classe più generale. Così della classe dei segmenti fa parte quella dei segmenti minori (o maggiori) di un dato segmento: quella delle corde di un dato cerchio parallele ad una direzione assegnata, ecc.

Della classe degli angoli fa parte ad es. quella degli angoli acuti; quella degli angoli col vertice in un dato punto, ecc... Della classe dei triangoli, quella dei triangoli d'una data base, ecc...

256. Se più grandezze di una classe si succedono con una certa legge o con un ordine prestabilito, sì che presa una di queste grandezze resti assegnata la sua *successiva*, diremo che queste grandezze costituiscono una *successione* od una *serie*.

Ad es. le successive multiple di una grandezza costituiscono una serie; così le successive summultiple: similmente i triangoli (i poligoni) dedotti l'un dall'altro prendendo come vertici i punti medi dei lati del precedente, ecc.

Una serie naturalmente è parte di una classe.

Le grandezze appartenenti ad una classe o ad

una serie le diremo talvolta *gli elementi* della classe o della serie.

257. Una serie di grandezze si dice *crescente*, se ciascuna grandezza è maggiore della precedente; *decescente*, se ciascuna è minore della precedente.

Non si esclude però che qualche grandezza di una serie crescente o decrescente possa essere eguale alla precedente.

Così per indicare che una serie $A_1, A_2, A_3, \dots$ è crescente, scriveremo:

$$A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \dots \quad (1)$$

e se una serie $B_1, B_2, B_3, \dots$ è decrescente, scriveremo:

$$B_1 \geq B_2 \geq B_3 \geq \dots \quad (1)$$

volendo indicare che *alcune volte* possa verificarsi l'eguaglianza.

Potrebbe anche non essere soddisfatta nè l'una nè l'altra condizione: ma qui non si tratterà che di serie crescenti o decrescenti.

258. Una serie crescente $A_1 \leq A_2 \leq A_3 \dots$ può dar luogo a due casi affatto distinti. O è possibile assegnare una grandezza B (e perciò quante si vogliano) maggiore di ogni elemento della serie, oppure non è possibile; il che equivale a dire che comunque si prenda la B , tra gli elementi della serie A_n ve n'è uno (e perciò tutti i successivi) maggiore della B .

(1) Il segno $\leq$ si legge *minore o eguale* ed il segno $\geq$ *maggiore o eguale*. Per brevità talora indicheremo una serie $A_1, A_2, A_3, \dots$ (crescente o decrescente) con A_n , dove s' intende che l'indice n varia secondo la serie naturale dei numeri.

Così p. es., se AB è un segmento (fig. 134), A_1

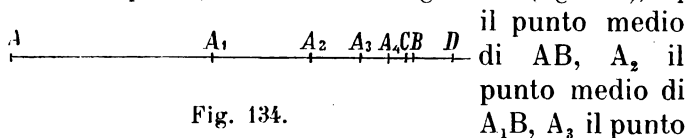


Fig. 134.

il punto medio di AB , A_2 il punto medio di A_1B , A_3 il punto medio di A_2B , ecc..., la serie dei segmenti AA_1 , AA_2 , AA_3 ,... è crescente, ma il segmento AB , od un segmento maggiore di AB è maggiore di ogni segmento della serie.

Invece se sopra una retta si prendono a partire da A (fig. 135) successivamente i segmenti AB , BC , CD ,... adiacenti ed eguali, la serie dei segmenti AB , AC , AD ,... (cioè la serie AB , $2AB$, $3AB$,...) è crescente non solo, ma in essa si potrà trovare un segmento (e tutti i successivi) che sia maggiore di un segmento qualunque fissato.

Nel primo caso si dice che la serie cresce *limitatamente*, nel secondo che cresce *illimitatamente*

ALTRO ESEMPIO. Se dal punto A (fig. 135) si eleva la perpendicolare alla AB e si congiunge un punto qualunque O di questa coi punti B , C , D ,... gli angoli $\widehat{AOB}$, $\widehat{AOC}$, $\widehat{AOD}$,... formano una serie che

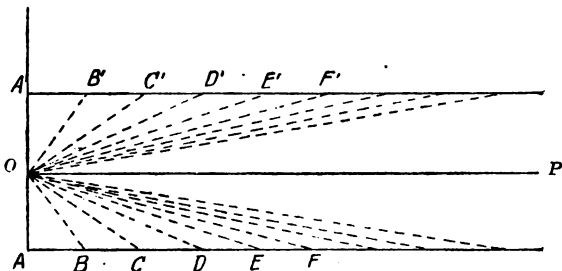


Fig. 135.

cresce limitatamente, perchè tutti sono minori dell'angolo $\widehat{AOP}$, dove OP è parallela alla AB .

259. Così una serie decrescente può dar luogo a due casi: o si può assegnare una grandezza (e perciò quante si vogliano) minore di ogni elemento della serie, ed allora questa decresce *limitatamente*, oppure non è possibile; il che equivale a dire che comunque sia la grandezza assegnata, si può trovare un elemento nella serie (e perciò i successivi) minore di quella, ed allora la serie decresce *illimitatamente*.

Per es.: se AB è un segmento (fig. 136), C il suo punto di mezzo, B₁ il punto di mezzo di CB, B₂ il punto medio di CB₁, B₃ di CB₂,... la serie

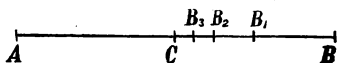


Fig. 136.

dei segmenti AB, AB₁, AB₂,... decresce limitatamente perchè AC è minore dei segmenti AB₁, AB₂,...

Invece la serie CB, CB₁, CB₂,... cioè la serie

$$CB, \frac{1}{2} CB, \frac{1}{4} CB, \dots$$

per quanto si è detto al n. 231, decresce illimitatamente.

ALTRO ESEMPIO. Se nella fig. 135 a partire da O si prende OA' = OA e condotta da A' la parallela alla AB, si prendono su questa i segmenti A'B', B'C', C'D'... eguali ad AB, e si congiunge il punto O coi punti B', C', D',..., la serie $\widehat{AOB'}$, $\widehat{AOC'}$, $\widehat{AOD'}$,... decresce limitatamente, perchè questi angoli sono tutti maggiori di $\widehat{AOP}$; mentre si può verificare che la serie $\widehat{POB}$, $\widehat{POC}$, $\widehat{POD}$,... (o la serie eguale $\widehat{POB'}$, $\widehat{POC'}$, $\widehat{POD'}$,...) decresce illimitatamente.

260. Si ritorni a considerare la serie AA₁, AA₂, e AA₃,... (fig. 134) che cresce limitatamente. È chiaro che il punto B ed ogni punto a destra di B, come D,

hanno da A distanze maggiori di qualunque segmento della serie: invece per un punto a sinistra di B, per es. C (per quanto vicino a B), ciò non può verificarsi ⁽¹⁾. Ed infatti se si continua la serie colla legge anzidetta, siccome i segmenti $A_1B, A_2B, A_3B, \dots$, sono ciascuno metà del precedente, decrescono illimitatamente, e si finirà coll'ottenere uno A_nB minore di CB ed allora sarà $AA_n > AC$. Il segmento AB adunque è il minimo tra quelli che sono maggiori di qualsiasi segmento della serie, ed ha la proprietà che le successive differenze tra esso e quelli della serie, cioè $A_1B, A_2B, A_3B, \dots$ decrescono illimitatamente. Ciò non si verifica per nessun altro segmento come $AD > AB$, perchè le differenze $A_1D, A_2D, \dots$ sono tutte maggiori di BD .

In generale, data una serie di grandezze

$$A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \dots$$

che cresce limitatamente, esiste una classe di grandezze che sono maggiori di qualsiasi elemento della serie. Se questa classe *ammette un elemento minimo*, questa grandezza dev'esser tale che le successive differenze tra essa e gli elementi della serie decrescano illimitatamente.

Ed infatti, detta L questa grandezza, ove le differenze $L - A_1, L - A_2, \dots$ non decrescessero illimitatamente, si potrebbe assegnare una grandezza M minore di tutte le differenze $L - A_n$ cioè

$$M < L - A_n$$

da cui

⁽¹⁾ Si può dire che quel punto B divide la retta in due parti, in una delle quali si trovano i segmenti della serie e e nell'altra *tutti* i punti le cui distanze da A sono maggiori di ogni segmento della serie.

$$M + A_n < L \quad \text{ed anche} \quad A_n < L - M$$

cioè vi sarebbe una grandezza $L - M$ (minore di L) maggiore della serie A_n ; il che contraddice l'ipotesi che L sia la minima.

Tale grandezza L si dice *limite* della serie A_n .

Riassumendo, una grandezza L è limite di una serie $A_1 \leq A_2 \leq \dots$ crescente limitatamente, se soddisfa alle due seguenti condizioni:

1.° che sia maggiore di tutti gli elementi della serie;

2.° che le differenze $L - A_1, L - A_2, \dots$ decrescano illimitatamente.

261. Analogamente ragionando per una serie

$$B_1 \geq B_2 \geq \dots$$

che decresce limitatamente, si dirà che, se la classe delle grandezze minori degli elementi della serie ammette un elemento massimo, e sia L , questa grandezza è tale che le differenze $B_n - L$ decrescono illimitatamente.

Ed infatti, ove ciò non fosse, si potrebbe assegnare una grandezza

$$M < B_n - L \quad \text{da cui} \quad L + M < B_n;$$

cioè vi sarebbe una grandezza $L + M$ (maggiore di L) che sarebbe minore delle grandezze B_n , il che contraddice l'ipotesi che L sia la massima.

Tale grandezza L si dice *limite* della serie B_n . La grandezza L adunque è limite d'una serie B_n che decresce limitatamente, se soddisfa alle due seguenti condizioni:

1.° che sia minore di tutti gli elementi della serie:

2.° che le differenze $B_1 - L$, $B_2 - L$, ... decrescano illimitatamente.

Questa grandezza è unica evidentemente, perciò

Due grandezze L ed L' che sono limiti di una serie crescente o decrescente sono eguali (equivalenti).

Così negli esempi sopra citati il segmento AB (fig. 134) è il limite della serie $AA_1, AA_2, AA_3, \dots$ e l'angolo $\widehat{AOP}$ (fig. 135) è il limite della serie $\widehat{AOB}, \widehat{AOC}, \dots$; il segmento AC (fig. 136) è il limite della serie $AB_1, AB_2, AB_3, \dots$, e l'angolo $\widehat{AOP}$ (fig. 135) è limite della serie $\widehat{AOB'}, \widehat{AOC'}, \dots$

262. POSTULATO DELLA CONTINUITÀ. Si *ammette* che ogni serie crescente o decrescente limitatamente abbia il limite ⁽¹⁾.

OSSERVAZIONE. Una grandezza A può essere considerata (quando ci piaccia) come limite di una serie crescente o decrescente limitatamente. Infatti, se si indica con n una serie di numeri che cresce illimitatamente (ad es. $n = 2^k$ per $k = 1, 2, 3, \dots$) le serie simboleggiate con $\frac{n-1}{n} A$ e $\frac{n+1}{n} A$ (la prima crescente, la seconda decrescente) hanno per limite A .

263. Due classi o due serie di grandezze $A_1, A_2, A_3, \dots$ $B_1, B_2, B_3, \dots$ sono *dipendenti* od in *corrispondenza*, se ogni grandezza della prima ne assegna una od alcune speciali della seconda; la corrispondenza è *univoca* e *reciproca*, o semplicemente *univoca*, se ogni grandezza A_1 della prima ne assegna una sola B_1 della seconda, e reciprocamente ogni grandezza

⁽¹⁾ Ricordiamo che si tratta di grandezze che soddisfanno alle condizioni indicate al n. 67 e segg., cioè di 1.ª e di 2.ª specie.

B_1 della seconda assegni la stessa grandezza A_1 della prima e questa sola ⁽¹⁾.

ESEMPLI. 1.° In un dato cerchio ad una classe di archi corrisponde la classe delle corde che hanno gli stessi estremi, e ad ogni corda corrispondono due archi.

2.° In un dato cerchio una classe di angoli al centro corrisponde alla classe degli archi compresi fra i lati, ed in questo caso la corrispondenza è univoca, perchè ad un angolo corrisponde un solo arco e reciprocamente.

264. Due serie omogenee ed in corrispondenza univoca sono *convergenti*, se la prima è decrescente e la seconda crescente, entrambe limitatamente; se gli elementi della prima sono maggiori degli elementi della seconda; e se le differenze fra gli elementi corrispondenti formano una serie che decresce illimitatamente.

ESEMPIO. Sia AB un segmento (fig. 137) e C il suo punto di mezzo:

D il punto medio di CB ed E il punto medio di AC; D_1 di CD e E_1 di EC; D_2

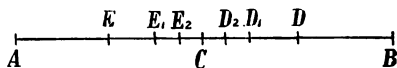


Fig. 137.

di CD_1 ed E_2 , di E_1C ecc.... Le due serie AD, AD_1 , AD_2 ,... ed AE, AE_1 , AE_2 ,... sono convergenti.

ALTRO ESEMPIO. Le due serie

$$\begin{aligned} & \widehat{AOB'}, \widehat{AOC'}, \widehat{AOD'}.... \\ & \widehat{AOB}, \widehat{AOC}, \widehat{AOD},.... \end{aligned}$$

della fig. 135, sono convergenti.

⁽¹⁾ Noi non ci occupiamo che di corrispondenze univoche e reciproche, perciò ci permettiamo di sottintendere la parola *reciproca*. La relazione di corrispondenza può essere qualunque.

265. TEOREMA. *Due serie convergenti hanno lo stesso limite.*

Sieno

$B_1 > B_2 > \dots B_n > \dots$ e $A_1 < A_2 < \dots A_n < \dots$
due serie convergenti, e sieno B il limite della prima serie ed A quello della seconda: dico che $B = A$.
Infatti sia, se è possibile, $B > A$; allora per qualunque coppia di grandezze corrispondenti delle due serie B_n, A_n si avrebbe

$$B_n > B > A > A_n$$

da cui

$$B_n - A_n > B - A$$

il che contraddice all'ipotesi che le differenze $B_n - A_n$, decrescano illimitatamente. Sia invece $B < A$: poichè B è limite della prima serie si potrà trovare in essa una grandezza B_r tale che:

$$B_r - B < A - B, \text{ da cui } B_r < A$$

e poichè A è il limite della seconda serie, si potrà trovare una grandezza A_s tale che

$$A - A_s < A - B_r, \text{ da cui } A_s > B_r$$

ma ciò è impossibile per essere le grandezze della prima serie maggiori di tutte quelle della seconda. Dunque $B = A$.

COROLLARIO. *Una grandezza sempre compresa fra due serie convergenti è il loro limite: e due grandezze comprese fra le stesse serie sono eguali (equivalenti).*

Rappresenteremo talvolta due serie convergenti, come le precedenti, col simbolo (B_n, A_n) ; e se A è il limite comune scriveremo; $A = \lim (B_n, A_n)$.

OSSERVAZIONE. Una grandezza A può essere considerata come limite di due serie convergenti. Ad esempio le serie $\frac{n+1}{n}A$, $\frac{n-1}{n}A$, considerate

nell'osservazione al n. 262 sono convergenti ed hanno per limite A .

266. Date due serie $A_1, A_2, A_3, \dots B_1, B_2, B_3, \dots$ omogenee ed in corrispondenza univoca, entrambe decrescenti illimitatamente, se si addizionano le grandezze corrispondenti, si ha una nuova serie $(A_1 + B_1), (A_2 + B_2), \dots$ che diremo la serie *somma* delle due date, la quale pure decresce illimitatamente. Infatti è chiaro intanto che

$$(A_1 + B_1) \geq (A_2 + B_2) \geq (A_3 + B_3) \geq \dots;$$

di più detta M una grandezza omogenea alle date e piccola quanto si vuole, nelle due serie vi saranno due grandezze corrispondenti A_r e B_r tali che si abbia:

$$A_r < \frac{1}{2} M \quad \text{e} \quad B_r < \frac{1}{2} M$$

da cui addizionando:

$$A_r + B_r < M$$

dunque la serie decresce illimitatamente. Analogamente si ragionerebbe per due serie crescenti illimitatamente. È così dimostrato il

TEOREMA. *La serie somma di due serie, che decrescono o crescono illimitatamente, decresce o cresce illimitatamente.*

OSSERVAZIONE. Il teorema si estende facilmente a più serie, ma in numero finito. Per le serie crescenti illimitatamente il numero può essere qualunque.

COROLLARI. 1.° *Le serie $2A_1, 2A_2, 2A_3, \dots; 3A_1, 3A_2, 3A_3, \dots$ ed in generale $mA_1, mA_2, mA_3, \dots$ decrescono illimitatamente.*

2.° *Le serie $\frac{1}{2}A_1, \frac{1}{2}A_2, \frac{1}{2}A_3, \dots$ ed in generale $\frac{1}{m}A_1, \frac{1}{m}A_2, \dots$ decrescono illimitatamente.*

3.° Infine la serie $\frac{m}{n}A_1, \frac{m}{n}A_2, \dots$ decresce illimitatamente.

267. Date ancora due serie

$$A_1 \leq A_2 \leq A_3, \dots, \quad B_1 \leq B_2 \leq B_3, \dots,$$

omogenee ed in corrispondenza univoca, che crescano entrambe limitatamente, ed i cui rispettivi limiti sieno A e B , se si addizionano le grandezze corrispondenti, si ottiene una nuova serie

$$(A_1 + B_1) \leq (A_2 + B_2) \leq (A_3 + B_3), \dots$$

somma delle date, che cresce pure limitatamente, come è manifesto; perciò avrà un limite: questo limite dico che è $(A + B)$. Infatti la grandezza $(A + B)$ è maggiore di tutte le grandezze $(A_1 + B_1)$, $(A_2 + B_2), \dots$; di più detta M una grandezza omogenea alle date e piccola quanto si vuole, nelle due serie vi saranno due grandezze corrispondenti A_r e B_r tali che si abbia nello stesso tempo:

$$A - A_r < \frac{1}{2}M, \quad \text{e} \quad B - B_r < \frac{1}{2}M$$

da cui addizionando:

$$(A - A_r) + (B - B_r) < M$$

che si può anche scrivere:

$$(A + B) - (A_r + B_r) < M$$

dunque le differenze:

$$(A + B) - (A_1 + B_1), (A + B) - (A_2 + B_2), \dots$$

decrescono illimitatamente, e perciò $(A + B)$ è il limite della serie $(A_1 + B_1), (A_2 + B_2), \dots$ (n. 260).

Analogamente si ragiona per due serie decrescenti limitatamente.

Rimane così dimostrato il

TEOREMA. *La serie somma di due serie che crescono o decrescono limitatamente, cresce o decresce limitatamente ed ha per limite la somma dei limiti.*

OSSERVAZIONE. Il teorema si estende facilmente a più serie, purchè in numero finito.

COROLLARI 1.° *La serie $2A_1, 2A_2, 2A_3, \dots$ ha per limite $2A$: così la serie $3A_1, 3A_2, \dots$ ha per limite $3A$; ed in generale la serie $mA_1, mA_2, \dots$ ha per limite mA .*

2.° *La serie $\frac{1}{2}A_1, \frac{1}{2}A_2, \dots$ ha per limite $\frac{1}{2}A$, ed in generale la serie $\frac{1}{m}A_1, \frac{1}{m}A_2, \dots$ ha per limite $\frac{1}{m}A$.*

3.° *Infine la serie $\frac{m}{n}A_1, \frac{m}{n}A_2, \dots$ ha per limite $\frac{m}{n}A$.*

268. Come applicazione di quanto precede si possono dimostrare i seguenti teoremi:

1.° *Una serie di rettangoli di eguale altezza cresce (decresce) illimitatamente, se le loro basi crescono (decrescono) illimitatamente, oppure anche: se le loro basi e le loro altezze crescono (decrescono) illimitatamente; oppure anche se le loro basi crescono (decrescono) limitatamente e le loro altezze crescono (decrescono) illimitatamente.*

2.° *Una serie di rettangoli di altezza A , di cui le basi crescono (decrescono) limitatamente ed hanno per limite B , cresce (decresce) limitatamente ed ha per limite il rettangolo $A.B$.*

3.° *Due serie di rettangoli, di cui le altezze sono due serie convergenti al limite A , e le basi due serie convergenti al limite B , sono convergenti al rettangolo $A.B$.*

Diamo la dimostrazione di quest'ultimo, lasciando i precedenti allo studioso. Sieno

$$A_1 \geq A_2 \geq A_3 \geq A_4 \geq \dots$$

$$A'_1 \leq A'_2 \leq A'_3 \leq A'_4 \leq \dots$$

due serie di segmenti convergenti al limite A , e sieno

$$B_1 \geq B_2 \geq B_3 \geq \dots$$

$$B'_1 \leq B'_2 \leq B'_3 \leq \dots$$

due serie di segmenti convergenti al limite B . Dico che le serie dei rettangoli

$$A_1 \cdot B_1 \geq A_2 \cdot B_2 \geq A_3 \cdot B_3 \geq \dots$$

$$A'_1 \cdot B'_1 \leq A'_2 \cdot B'_2 \leq A'_3 \cdot B'_3 \leq \dots$$

sono convergenti al rettangolo $A \cdot B$. Infatti è evidente che la serie $A_n \cdot B_n$ è decrescente e la serie $A'_n \cdot B'_n$ è crescente; che $A_n \cdot B_n > A'_n \cdot B'_n$. Resta ora a provare che la serie $A_n \cdot B_n - A'_n \cdot B'_n$ decresce illimitatamente. Ora

$A_n \cdot B_n - A'_n \cdot B'_n = A_n \cdot B_n - A_n \cdot B'_n + A_n \cdot B'_n - A'_n \cdot B'_n$
ed anche

$A_n \cdot B_n - A'_n \cdot B'_n = A_n \cdot (B_n - B'_n) + B'_n \cdot (A_n - A'_n)$
e poichè le differenze $B_n - B'_n$ ed $A_n - A'_n$ decrescono illimitatamente per ipotesi, anche le serie di rettangoli

$$A_n \cdot (B_n - B'_n) \quad \text{e} \quad B'_n \cdot (A_n - A'_n)$$

decrescono illimitatamente (1.º Teor.); e lo stesso avviene della loro somma (n. 266), cioè di

$$A_n \cdot B_n - A'_n \cdot B'_n.$$

Che poi $A \cdot B$ sia il limite comune, risulta dal fatto che

$$A_n \cdot B_n > A \cdot B > A'_n \cdot B'_n$$

qualunque sia n .

OSSERVAZIONE. Il teorema regge ancora, se ad una o ad entrambe le serie convergenti al limite A (o al limite B) si sostituisce una serie di segmenti eguali ad A (od a B).

§ 4.° Grandezze di terza specie. ⁽¹⁾

269. Nel § precedente abbiamo tacitamente supposto trattarsi di grandezze di 1.^a o di 2.^a specie, per le quali sono stati già dati i concetti di eguaglianza (equivalenza) di somma e differenza. Ma vi sono delle grandezze che diremo di 3.^a specie, le quali sfuggono a questa classificazione, come si vedrà in seguito (tali, per dare un es. le parti di circonferenza o di cerchio di raggi differenti). Per queste grandezze, anzi per poterle dire tali, possiamo ora stabilire questi stessi concetti; il che converrà fare in modo però da includervi quelli già dati per le prime due specie.

Intanto ogni grandezza vien *definita* come *limite di due serie convergenti* (composte di grandezze di 1.^a o 2.^a specie).

270. Concetto di eguaglianza. — **TEOREMA.** *Date due coppie di serie convergenti, se ciascuna serie decrescente è maggiore di ciascuna serie crescente, i limiti delle due coppie sono eguali.*

Sieno (A_n, B_n) e (C_n, D_n) due coppie di serie convergenti che hanno rispettivamente per limiti L ed M ; (grandezze di 1.^a o 2.^a specie) e sia $A_n > D_n$ e $C_n > B_n$: dico che $L = M$.

Proveremo che anche le coppie A_n, D_n e C_n, B_n sono convergenti. Infatti, essendo $C_n > B_n$ si ha

$$A_n - D_n < A_n - B_n + C_n - D_n$$

⁽¹⁾ Ove non si trovasse qui opportuno questo paragrafo, si può rimandarlo dove si hanno esempi di questa specie di grandezze, e cioè al n. 375 e segg.

e poichè per ipotesi le differenze $A_n - B_n$ e $C_n - D_n$ decrescono illimitatamente, lo stesso avviene delle loro somme (n. 266) e delle differenze $A_n - D_n$: dunque A_n, D_n sono convergenti.

Ma A_n ha per limite L ; D_n ha per limite M ; dunque (n. 265, Cor.) $L = M$.

Se le grandezze L ed M sono di 3.^a specie, si assume come definizione che:

Due grandezze

$$L = \lim (A_n, B_n) \text{ ed } M = \lim (C_n, D_n)$$

sono eguali (equivalenti) se $A_n > D_n$ e $C_n > B_n$.

Il che equivale a dire che sono eguali, se scambiando fra loro le serie decrescenti oppure le crescenti, si hanno due coppie di serie convergenti.

OSSERVAZIONE. S'intende poi naturalmente che le grandezze L, M sono equivalenti, se le serie A_n, C_n , oppure le B_n, D_n , o entrambe queste coppie, sieno composte di grandezze equivalenti, ciascuna a ciascuna.

271. Concetto di somma, di multipla, di summultipla. — TEOREMA. *Date due coppie di serie convergenti, la somma delle serie decrescenti e quella delle crescenti sono convergenti ed hanno per limite la somma dei limiti.*

Se $L = \lim (A_n, B_n)$ e $M = \lim (C_n, D_n)$ si ha $L + M = \lim (A_n + C_n, B_n + D_n)$

La dimostrazione è ovvia tenendo presente il teor. n. 267.

Il teorema si estende facilmente al caso di più coppie di serie; alle coppie multiple, summultiple di una coppia data.

Se le grandezze L ed M sono di 3.^a specie, si

definisce come *somma* $L + M$ il limite delle coppie $(A_n + C_n, B_n + D_n)$.

Si definisce mL come il limite delle coppie (mA_n, mB_n) ; $\frac{1}{m} L$ come il limite delle coppie

$(\frac{1}{m} A_n, \frac{1}{m} B_n)$ ecc...

272. Concetto di differenza. — Sieno (A_n, B_n) e (C_n, D_n) due coppie di serie convergenti rispettivamente ai limiti L ed M (di 1.^a e 2.^a specie), e sia ad es. $L > M$. In tal caso si possono trovare due termini delle serie B_n, C_n tali che da quelli in poi si abbia $B_n > C_n$. Infatti le differenze $L - B_n$ e $C_n - M$ per ipotesi decrescono illimitatamente, perciò si possono trovare due termini B_k, C_k tali che

$$L - B_k < \frac{1}{2} (L - M)$$

$$C_k - M < \frac{1}{2} (L - M)$$

da cui addizionando

$$L - B_k + C_k - M < L - M$$

dalla quale diseuguaglianza risulta chiaro che $B_k > C_k$; e lo stesso sarà di tutti i termini seguenti delle due serie.

Se L ed M sono di 3.^a specie si dirà che $L > M$, quando si abbia $B_n > C_n$.

Ciò posto, dico che: *le serie* $(A_n - D_n, B_n - C_n)$ *sono convergenti.*

Infatti $(A_n - D_n)$ è decrescente, $(B_n - C_n)$ è crescente e $A_n - D_n > B_n - C_n$; finalmente $(A_n - D_n) - (B_n - C_n) = A_n - B_n + C_n - D_n$ decresce illimitatamente (n. 266).

Il limite delle due serie è evidentemente $L - M$ perchè

$$A_n - D_n > L - M > B_n - C_n.$$

Se L ed M sono di 3.^a specie si definisce come *differenza* il limite della coppia $(A_n - D_n, B_n - C_n)$,

OSSERVAZIONE. — Da questa definizione risulta che se si ha $L = \lim (A_n, B_n)$, la grandezza L deve ritenersi maggiore delle B_n e minore delle A_n . Infatti sia B_k uno degli elementi della B_n : si trovino due serie convergenti che hanno per limite

$$B_k, \text{ e sieno ad es. } \frac{n+1}{n} B_k, \quad \frac{n-1}{n} B_k$$

(per $n = 2, 3, 4, \dots$); (vedasi l'osservazione al n. 265); si abbia cioè

$$B_k = \lim \left(\frac{n+1}{n} B_k, \quad \frac{n-1}{n} B_k \right)$$

Ora se B_{k+1} è l'elemento successivo a B_k pongasi $B_{k+1} - B_k = D$.

Poichè $\frac{n+1}{n} B_k$ è decrescente ed ha per limite B_k si potrà trovare un elemento di questa serie tale che la sua differenza da B_k sia minore di D , cioè di $B_{k+1} - B_k$; sia $\frac{n'+1}{n'} B_k$; si avrà dunque:

$$\frac{n'+1}{n'} B_k - B_k < B_{k+1} - B_k$$

da cui si deduce $B_{k+1} > \frac{n'+1}{n'} B_k$, e perciò $L > B_k$.

Analogamente si dimostra essere L minore di un elemento qualsiasi della A_n

Stabiliti in tal modo i concetti di eguaglianza, di somma e di differenza, è facile vedere che anche a questa terza specie di grandezze sono applicabili le proposizioni di cui al n. 71.

§ 5.° Misura delle grandezze incommensurabili.

273. Le considerazioni esposte nei paragrafi precedenti permettono di estendere alle grandezze incommensurabili i teoremi sulla misura già dati per le grandezze commensurabili.

Sieno date due grandezze incommensurabili A , B : s'immagini la summultipla di B secondo un numero qualunque n ; si divida A per $\frac{1}{n} B$: si avrà:

$$A = \frac{m}{n} B + R$$

ed anche:

$$\frac{m+1}{n} B > A > \frac{m}{n} B.$$

S'immagini ora una summultipla di $\frac{1}{n} B$ minore di R e di $\frac{m+1}{n} B - A$, e sia $\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{n} B = \frac{1}{n'} B$, ⁽¹⁾ e si divida A per $\frac{1}{n'} B$: si avrà:

$$A = \frac{m'}{n'} B + R'.$$

⁽¹⁾ Ove la B fosse una grandezza (ad es. un arco) di cui non si sanno costruire summultiple che secondo le potenze di 2, si cerchi una potenza di 2 tale che sia $2^k > n'$; allora $\frac{1}{2^k} B < \frac{1}{n'} B$: si divida A per $\frac{1}{2^k} B$.

ed anche:

$$\frac{m' + 1}{n'} B > A > \frac{m'}{n'} B.$$

Similmente s'immagini una summultipla di $\frac{1}{n'} B$ minore di R' e di $\frac{m' + 1}{n'} B - A$ e sia $\frac{1}{n''} B$, e si divida nuovamente la A per questa summultipla. Così continuando si otterranno due serie di grandezze:

$$\frac{m + 1}{n} B > \frac{m' + 1}{n'} B > \frac{m'' + 1}{n''} B > \dots \quad 1)$$

e

$$\frac{m}{n} B < \frac{m'}{n'} B < \frac{m''}{n''} B < \dots \quad 2)$$

che sono convergenti. Infatti per essere $\frac{1}{np} B = \frac{1}{n'} B < R$, è chiaro che $\frac{1}{np} B$ è contenuto mp volte in $\frac{m}{n} B$ ed almeno una volta in R , e perciò almeno $mp + 1$ volte in $A = \frac{m}{n} B + R$. Ciò equivale a dire che

$$\frac{m'}{n'} B \geq \frac{mp + 1}{np} B > \frac{m}{n} B$$

il che prova che la serie 2) è crescente.

D'altra parte per la divisione fatta si ha

$$\frac{m' + 1}{n'} B - A < \frac{1}{n'} B$$

e per ipotesi

$$\frac{1}{n'} B < \frac{m + 1}{n} B - A$$

da cui

$$\frac{m' + 1}{n'} B - A < \frac{m + 1}{n} B - A$$

ed anche

$$\frac{m' + 1}{n'} B < \frac{m + 1}{n} B$$

il che prova che la serie 1) è decrescente. Di più le grandezze della 1) sono maggiori di quelle della 2) e le differenze $\frac{1}{n}B, \frac{1}{n'}B, \dots$ fra le grandezze corrispondenti decrescono illimitatamente, poichè ciascuna è summultipla della precedente; dunque le serie sono convergenti, e la grandezza A compresa fra le serie stesse è il loro limite ⁽¹⁾.

Le due serie di numeri

(1) Veramente la condizione $\frac{1}{np} B < R$ è sufficiente per concludere alla convergenza delle due serie $\frac{m^{(k)} + 1}{n^{(k)}} B$, $\frac{m^{(k)}}{n^{(k)}} B$. Infatti, per quanto si è detto sopra, la 2) è crescente. In quanto alla 1) è chiaro intanto che nessuna grandezza della serie può superare la precedente; perciò o le grandezze sono tutte eguali o vanno decrescendo (non escluso s' intende che alcune consecutive possano essere uguali. Ora che siano tutte eguali è impossibile, perchè si ha

$$\frac{m^{(k)} + 1}{n^{(k)}} B - \frac{m^{(k)}}{n^{(k)}} B > \frac{m^{(k)} + 1}{n^{(k)}} B - A$$

e poichè le prime differenze decrescono illimitatamente, lo stesso deve avvenire delle seconde, il che non potrebbe avverarsi se la serie $\frac{m^{(k)} + 1}{n^{(k)}} B$ non fosse decrescente. Tuttavia abbiamo preferito il procedimento sopraindicato, gentilmente consigliatoci dal chiar. prof. Rozzolino, preside del R. Liceo di Foggia, perchè ci è sembrato più spedito.

$$\frac{m+1}{n} > \frac{m'+1}{n'} \dots \text{ e } \frac{m}{n} < \frac{m'}{n'} \dots,$$

misure delle due serie di grandezze rispetto a B , sono pure convergenti ed hanno un limite ⁽¹⁾, il quale si definisce come la *misura* di A rispetto a B .

Questo numero limite (che non può essere nè intero, nè frazionario) si dice *incommensurabile* o *irrazionale*.

Adunque:

1.° TEOREMA. *Se A e B sono due grandezze incommensurabili, esiste un numero ed uno solo, che esprime la misura di A rispetto a B .*

Notisi che lo stesso procedimento applicato a due grandezze commensurabili può condurre ad analoghi risultati, colla differenza che in tal caso il numero limite è commensurabile o razionale.

Vogliamo dire con questo che anche una grandezza commensurabile coll'unità di misura può presentarsi come limite di due serie convergenti (n. 265 Oss.).

Lo stesso dicasi del suo valore, che è razionale.

Così per es. se $A = \frac{1}{3} B$ e le summultiple di B adoperate nelle successive divisioni fossero $\frac{1}{10} B$, $\frac{1}{100} B \dots \frac{1}{1000} B \dots$ si troverebbero le due serie di grandezze

$$\frac{4}{10} B > \frac{34}{100} B \dots \text{ e } \frac{3}{10} B < \frac{33}{100} B \dots$$

(1) Le considerazioni da noi fatte sulle serie di grandezze si possono ripetere sui numeri ed ammettere analogo postulato.

convergenti, che hanno per limite la A , e le due serie di numeri

$$\frac{4}{10}, \frac{34}{100} \dots \text{ e } \frac{3}{10}, \frac{33}{100} \dots$$

convergenti, che hanno per limite il numero $\frac{1}{3}$ misura di A rispetto a B .

2.° Reciprocamente:

TEOREMA. *Data una grandezza B ed un numero incommensurabile, esiste una grandezza ed una sola della quale il numero dato è la misura rispetto a B .*

Infatti col sussidio dell'Aritmetica si calcolino le due serie di numeri

$$\frac{m+1}{n} \geq \frac{m'+1}{n'} \dots$$

ed

$$\frac{m}{n} \leq \frac{m'}{n'} \dots$$

convergenti, che hanno per limite il numero dato ⁽¹⁾: si formino le corrispondenti serie di grandezze

$$\frac{m+1}{n} B > \frac{m'+1}{n'} B \dots$$

$$\frac{m}{n} B \leq \frac{m'}{n'} B \dots$$

che saranno pure convergenti: il loro limite è appunto l'unica grandezza, la cui misura è il numero dato ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Se la B fosse una grandezza della quale si sanno costruire le summultiple solo secondo certi numeri, si scelgono i numeri $n, n', \dots$ in modo da poter costruire le summultiple secondo quei numeri. Ad es. se B fosse un arco, i numeri $n, n', \dots$ saranno potenze del 2.

⁽²⁾ Collo stesso ragionamento si mostra, come debbasi concepire la summultipla d'una grandezza data secondo un

Per indicare che un numero irrazionale h è il limite delle serie

$$\frac{m+1}{n} \geq \frac{m'+1}{n'} \geq \dots$$

ed

$$\frac{m}{n} < \frac{m'}{n'} < \dots$$

convergenti, scriveremo talvolta per brevità:

$$h = \lim \left(\frac{m+1}{n}, \frac{m}{n} \right).$$

274. Con somiglianti ragionamenti si possono estendere alle grandezze incommensurabili anche i

numero qualunque, quando si sappia almeno costruirne la summultipla secondo un particolare numero. Per es. se A è una grandezza, di cui si sa trovare la summultipla secondo il numero 2 (e quindi secondo il numero 2^n), come un angolo, un arco, ecco come va concepita per es. $\frac{1}{3} A$. Si calcolino col sussidio dell' Aritmetica le due serie convergenti

$$\frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{6}{16}, \frac{11}{32}, \frac{22}{64} \dots$$

e

$$\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{5}{16}, \frac{10}{32}, \frac{21}{64} \dots$$

che hanno per limite $\frac{1}{3}$. Le corrispondenti due serie di grandezze

$$\frac{2}{4}A, \frac{3}{8}A, \frac{6}{16}A, \frac{11}{32}A, \dots$$

e

$$\frac{1}{4}A, \frac{2}{8}A, \frac{5}{16}A, \frac{10}{32}A, \dots$$

pure convergenti, che si sanno costruire, hanno per limite $\frac{1}{3}A$.

teoremi 253 e 254 sul cambiamento dell'unità di misura.

Così pel teorema 253 diremo:

1.° TEOREMA. Se $A = hB$ e $B = lC$, dove

$$h = \lim \left(\frac{m+1}{n}, \frac{m}{n} \right)$$

ed

$$l = \lim \left(\frac{p+1}{q}, \frac{p}{q} \right),$$

sarà: $A = hlC$, dove

$$hl = \lim \left(\frac{(m+1)(p+1)}{nq}, \frac{mp}{nq} \right) \quad (1)$$

Infatti dall'ipotesi si ha:

$$\frac{m+1}{n} B > A > \frac{m}{n} B \quad \text{e} \quad \frac{p+1}{q} C > B > \frac{p}{q} C$$

(1) Nei trattati di Aritmetica razionale si dimostra che se,
 $h = \lim \left(\frac{m+1}{n}, \frac{m}{n} \right)$ ed $l = \lim \left(\frac{p+1}{q}, \frac{p}{q} \right)$

1.° le serie

$$\left(\frac{(m+1)(p+1)}{nq}, \frac{mp}{nq} \right)$$

sono convergenti: il loro limite, quando h ed l sono razionali, è hl ; lo stesso limite serve a definire il prodotto hl quando h ed l (o uno dei due) sono irrazionali.

2.° le serie

$$\left(\frac{m+1}{n} : \frac{p}{q}, \frac{m}{n} : \frac{p}{q} \right),$$

cioè le serie

$$\left(\frac{(m+1)q}{np}, \frac{mq}{n(p+1)} \right)$$

sono convergenti; il loro limite, quando h ed l sono razionali, è $\frac{h}{l}$; lo stesso limite serve a definire il quoziente $\frac{h}{l}$, quando h ed l (o uno dei due) sono irrazionali.

ora essendo

$$\frac{p+1}{q} C > B,$$

anche

$$\frac{(m+1)(p+1)}{nq} C > \frac{m+1}{n} B$$

ed essendo

$$B > \frac{p}{q} C$$

anche

$$\frac{m}{n} B > \frac{mp}{nq} C$$

la quale prova che la grandezza A è compresa fra

$$\frac{(m+1)(p+1)}{nq} C \quad \text{e} \quad \frac{mp}{nq} C$$

e perciò che la misura di A rispetto a C è il numero definito dalle serie

$$\left(\frac{(m+1)(p+1)}{nq}, \frac{mp}{nq} \right),$$

cioè il numero hl .

E pel teorema 254 diremo:

2.° TEOREMA. Se $A = hC$ e $B = lC$, dove

$$h = \lim \left(\frac{m+1}{n}, \frac{m}{n} \right)$$

ed

$$l = \lim \left(\frac{p+1}{q}, \frac{p}{q} \right),$$

sarà: $A = \frac{h}{l} B$, dove

$$\frac{h}{l} = \lim \left(\frac{(m+1)q}{np}, \frac{mq}{n(p+1)} \right)^{(1)}.$$

(1) Vedi nota pagina precedente.

Infatti si dimostra nell' Aritmetica razionale che se

$$l = \lim \left(\frac{p+1}{q}, \frac{p}{q} \right).$$

anche le serie $\left(\frac{q}{p}, \frac{q}{p+1} \right)$ sono convergenti e il loro limite è $\frac{1}{l}$; cioè

$$\frac{1}{l} = \lim \left(\frac{q}{p}, \frac{q}{p+1} \right)$$

Perciò se

$$B = lC, \text{ si deduce } C = \frac{1}{l} B$$

e ricordando che $A = hC$
pel teorema precedente si ha che

$$A = \left(h \times \frac{1}{l} \right) B, \text{ ossia } A = \frac{h}{l} B.$$

275. Da quanto è stato esposto sulla misura delle grandezze si può dedurre che:

Stabilita per ogni classe di grandezze quella che si assume come unità di misura, ciascuna classe di grandezze è in corrispondenza univoca colla classe dei numeri, cioè: ad ogni grandezza corrisponde un numero ed uno solo e reciprocamente: a grandezze eguali (equivalenti) corrispondono numeri eguali; alla grandezza somma o differenza di altre due corrisponde il numero somma o differenza dei due corrispondenti; alla grandezza nulla il numero zero; alla grandezza doppia, tripla,... oppure metà, terza parte... di un'altra, il numero doppio, triplo... oppure metà, un terzo... del corrispondente ecc.

§ 6.° Rapporti e proporzioni fra grandezze.

276. Se A e B sono due grandezze omogenee, si dice *rapporto* (o *ragione*) di A a B la misura di A rispetto a B . Così se $A = \frac{m}{n} B$, il numero $\frac{m}{n}$ è il rapporto di A a B , e si scrive:

$$\frac{A}{B} = \frac{m}{n} \quad \text{oppure:} \quad A : B = m : n.$$

Il rapporto di due grandezze può essere commensurabile od incommensurabile.

Rapporto di A a B e *misura* di A rispetto a B hanno dunque lo stesso significato; ma ordinariamente si preferisce la parola misura, quando la B è quella grandezza che si è stabilita come unità di misura; ed in questo caso si dice senz'altro la *misura* od il *valore* di A .

277. Dai teoremi 253 e 254 generalizzati al numero 274 si deduce:

1.° TEOREMA. Se A , B , C sono tre grandezze omogenee, il rapporto $A : C$ è uguale al prodotto del rapporto $A : B$ pel rapporto $B : C$ ⁽¹⁾.

$$\text{Se } \frac{A}{B} = \frac{m}{n} \quad \text{e} \quad \frac{B}{C} = \frac{p}{q} \quad \text{si ha: } \frac{A}{C} = \frac{mp}{nq}$$

cioè:

$$\frac{A}{C} = \frac{A}{B} \times \frac{B}{C}.$$

(1) Il rapporto $A : C$ si usa dire che è *composto* dei rapporti di $A : B$ e di $B : C$.

COROLLARIO. Se $\frac{A}{B} = \frac{m}{n}$, $\frac{B}{C} = \frac{p}{q}$, $\frac{C}{D} = \frac{r}{s}$
sarà: $\frac{A}{D} = \frac{mpr}{nqs}$, e così di seguito.

2.° TEOREMA. Se due grandezze A , B sono misurate rispetto ad una terza C , il rapporto $A : B$ è eguale al quoziente della misura di A per quella di B .

Se $\frac{A}{C} = \frac{m}{n}$ e $\frac{B}{C} = \frac{p}{q}$, si ha: $\frac{A}{B} = \frac{mq}{np}$,
cioè:

$$\frac{A}{B} = \frac{A}{C} : \frac{B}{C}.$$

OSSERVAZIONE. In Aritmetica si dice *rapporto di due numeri* il quoziente della loro divisione; perciò il precedente teorema si può enunciare così:

Il rapporto di due grandezze è eguale al rapporto delle loro misure.

278. Da quanto si è detto al n. 275 si deduce:

$$1.° (A \pm B) : C = (A : C) \pm (B : C)$$

$$2.° mA : B = m(A : B), \quad \frac{1}{m} A : B = \frac{1}{m} (A : B).$$

$$\frac{m}{n} A : B = \frac{m}{n} (A : B).$$

Di più:

TEOREMA. *Il rapporto di due grandezze è eguale al rapporto di due equimultiple, o di due equisummultiple, o di due equimultiple di equisummultiple.*

Dico cioè:

$$A : B = mA : mB = \frac{1}{m} A : \frac{1}{m} B = \frac{m}{n} A : \frac{m}{n} B.$$

Infatti se $A=hC$ e $B=lC$, si ha $mA = mhC$ e $mB = mlC$. Ora $A : B = h : l$ (n. 277, 2.º)

ed $mA : mB = mh : ml$;

ma in aritmetica si dimostra che $h : l = mh : ml$, dunque

$$A : B = mA : mB.$$

Analogamente per gli altri casi.

COROLLARIO. Si deduce che $A : mB = \frac{1}{m}(A : B)$.

Infatti il rapporto $A : mB$ (prendendo le equisummultiple secondo m) è eguale al rapporto

$\frac{1}{m}A : B$; e questo pel n. 278 ad $\frac{1}{m}(A : B)$.

279. Diconsi *reciproci* due rapporti come $A : B$ e $B : A$: è chiaro che il loro prodotto è eguale all'unità; poichè se $A : B = m$ (m numero qualunque), $B : A = \frac{1}{m}$ (n. 251, Teor. 1.º, Oss. 2.ª)

e si sa che:

$$m \times \frac{1}{m} = 1$$

perciò moltiplicare (o dividere) per un rapporto val quanto dividere (o moltiplicare) pel suo reciproco. Ad es.

$$\frac{A}{B} \times \frac{B}{C} = \frac{A}{B} : \frac{C}{B}.$$

280. Se due rapporti $A : B$ e $C : D$ sono eguali, le quattro grandezze A, B, C, D prese in quest'ordine si dice che *formano una proporzione* o sono in *proporzione*, e si scrive:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}, \text{ oppure } A : B = C : D$$

e si legge: *A sta a B come C sta a D.*

Si dice anche che le grandezze *A, B* sono *proporzionali (direttamente)* alle *C, D*; che le grandezze *A, B* sono *proporzionali inversamente* alle *D, C*; ed infine che le grandezze *A, D* sono *antiproporzionali* alle *B, C* ⁽¹⁾

Le quattro grandezze sono i *termini* della proporzione: *A* e *C* sono gli *antecedenti*, *B* e *D* i *consequenti*; *A* e *D* gli *estremi*, *B* e *C* i *medi*.

Si dice anche che *D* è *quarta proporzionale* dopo *A, B* e *C*.

Notiamo che mentre devono essere omogenee *A* e *B* tra loro e *C* e *D* tra loro, non è necessario che lo sieno le prime colle seconde, perchè le quattro grandezze sieno in proporzione.

Se in una proporzione i medi sono eguali, come ad es. se: $A : B = B : C$, si dice che la *B* è *media proporzionale* fra la *A* e la *C*.

Si dice anche che *C* è *terza proporzionale* dopo *A* e *B*.

281. TEOREMA. *Se quattro grandezze sono in proporzione, anche le loro misure sono in proporzione e reciprocamente.*

Se *A, B, C, D* sono le grandezze ed *a, b, c, d*, le loro misure (dove ciascuna delle due coppie *A, B* e *C, D* si intende riferita alla stessa unità di misura), si sa che (n. 277 Osserv.).

⁽¹⁾ Togliamo quest'ultima denominazione dall'eccellente libro: *Geometria piana* del prof. F. GIUDICE (Brescia, Tip. Apollonio. 1897).

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{b} \text{ e } \frac{C}{D} = \frac{c}{d},$$

perciò se

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}, \text{ anche } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

e reciprocamente.

282. Vediamo ora alcuni teoremi mediante i quali da una o più proporzioni date si possono dedurre altre proporzioni ⁽¹⁾.

1.° *Proporzioni dedotte da una data mediante cambiamento di posto dei termini.*

Dalla proporzione:

$$A : B = C : D$$

si deduce:

$$B : A = D : C$$

cioè: *se due rapporti sono eguali, i loro reciproci sono eguali.*

Ed anche

$$C : D = A : B$$

$$D : C = B : A$$

Di più, se le quattro grandezze sono tutte omogenee, si ha:

$$A : C = B : D$$

Infatti (n. 277, 1°).

$$A : C = (A : B) \times (B : C)$$

e

$$B : D = (B : C) \times (C : D)$$

perciò *i rapporti $A : C$ e $B : D$ essendo composti di rapporti eguali sono eguali.*

(1) Questi teoremi, volendo, si possono anche ritenere dimostrati coll'applicare alle proporzioni fra grandezze i teoremi correlativi sulle proporzioni numeriche (già dimostrati in aritmetica) in grazia del teorema n. 281 e reciproco.

Similmente dalle altre tre proporzioni si ha:

$$B : D = A : C$$

$$C : A = D : B$$

$$D : B = C : A$$

TEOREMA. Nella proporzione $A : B = C : D$,

1.° secondo che $A \begin{smallmatrix} > \\ = \\ < \end{smallmatrix} B$, è pure $C \begin{smallmatrix} > \\ = \\ < \end{smallmatrix} D$:

2.° e se le quattro grandezze sono omogenee,
secondo che $A \begin{smallmatrix} > \\ = \\ < \end{smallmatrix} C$, è pure $B \begin{smallmatrix} > \\ = \\ < \end{smallmatrix} D$.

Infatti:

1.° Se $A > B$ ciò vuol dire che $A : B > 1$, ed allora anche $C : D > 1$, da cui $C > D$. Analogamente negli altri due casi.

2.° dalla proporzione data permutando i medi si ha:

$$A : C = B : D$$

e così si ricade nel 1.° caso.

2.° Proporzioni dedotte da una data per sostituzione di multipli o summultipli ad alcuni termini.

Dalla proporzione:

$$A : B = C : D$$

si ha (n. 278, Teor.)

$$mA : mB = C : D$$

e (n. 278, 2.°)

$$mA : B = mC : D$$

ed anche (n. 278, Cor.)

$$A : mB = C : mD$$

dove m è un numero qualunque.

3.° Proporzioni dedotte da due date aventi termini eguali.

a) Dalle proporzioni:

$$\left. \begin{array}{l} A : B = E : F \\ C : D = E : F \end{array} \right\} \text{ si deduce } A : B = C : D$$

cioè: *due rapporti eguali ad un terzo sono eguali tra loro.*

COROLLARIO. *Se due proporzioni hanno tre termini ordinatamente eguali, il quarto è eguale al quarto.*

Dalle proporzioni

$$\left. \begin{array}{l} A : B = C : D \\ A : B = C : E \end{array} \right\} \text{ si deduce : } C : D = C : E$$

da cui, pel teor. n. 282, $D = E$.

Il che si esprime anche dicendo che: *date tre grandezze la quarta proporzionale dopo le tre è determinata.*

c) Dalle proporzioni:

$$\left. \begin{array}{l} A : E = C : F \\ B : E = D : F \end{array} \right\} \text{ si deduce: } A : B = C : D.$$

Infatti (n. 277, 2.º)

$$\begin{array}{l} e \quad A : B = (A : E) : (B : E) \\ \quad C : D = (C : F) : (D : F) \end{array}$$

perciò i rapporti $A : B$ e $C : D$, essendo quozienti di rapporti eguali, sono eguali.

E similmente da:

$$\left. \begin{array}{l} E : A = F : C \\ E : B = F : D \end{array} \right\} \text{ si deduce: } A : B = C : D$$

che si riduce al caso precedente invertendo i rapporti.

Questi teoremi si enunciano nel modo seguente:

Se due proporzioni hanno i conseguenti (gli antecedenti) eguali, gli antecedenti (i conseguenti) sono proporzionali.

d) Dalle proporzioni:

$$\left. \begin{array}{l} A : E = F : D \\ B : E = F : C \end{array} \right\} \text{ si deduce: } A : B = C : D.$$

Infatti

$$\begin{aligned} e \quad A : B &= (A : E) : (B : E) \\ C : D &= (C : F) \times (F : D) \end{aligned}$$

ma (n. 279)

$$(C : F) \times (F : D) = (F : D) \times (C : F) = (F : D) : (F : C)$$

perciò

$$C : D = (F : D) : (F : C)$$

e i due rapporti $A : B$ e $C : D$, essendo quozienti di rapporti eguali, sono eguali.

E similmente da:

$$\left. \begin{array}{l} E : A = D : F \\ E : B = C : F \end{array} \right\} \text{ si deduce: } A : B = C : D$$

Si riduce al caso precedente invertendo i rapporti.

Questi teor. si enunciano nel modo seguente:

Se due proporzioni hanno i medi (gli estremi) eguali, gli estremi (i medi) sono antiproporzionali.

4.^o *Proporzioni dedotte da una data mediante combinazioni di termini per addizione e sottrazione.*

a) Dalla proporzione: $A : B = C : D$

si ha:

$$\begin{aligned} (A + B) : B &= (C + D) : D \\ (A - B) : B &= (C - D) : D \quad (1) \end{aligned}$$

Infatti (n. 278, 1.^o)

$$\begin{aligned} (A \pm B) : B &= (A : B) \pm (B : B) = (A : B) \pm 1 \\ e \\ (C \pm D) : D &= (C : D) \pm (D : D) = (C : D) \pm 1 \end{aligned}$$

(1) Si prende $A - B$ o $B - A$ secondo che è $A > B$ o $B > A$. Lo stesso dicasi di ogni altra differenza considerata.

pel caso poi di $B > A$ (e perciò $D > C$) si ha

$$(B - A) : B = (D - C) : C$$

perchè

$$(B - A) : B = (B : B) - (A : B) = 1 - (A : B)$$

e

$$(D - C) : D = (D : D) - (C : D) = 1 - (C : D)$$

Dalla proporzione data si ha pure

$$A : (A + B) = C : (C + D)$$

$$A : (A - B) = C : (C - D)$$

ed infine:

$$(A + B) : (A - B) = (C + D) : (C - D)$$

le quali proporzioni si deducono dalla data e dalle due derivate applicando il n. 3, b), e si possono enunciare nel modo seguente:

In una proporzione, agli antecedenti, oppure ai conseguenti, si possono sostituire le somme, oppure le differenze, di ciascun antecedente col suo conseguente.

b) Dalla proporzione: $A : B = C : D$, se le quattro grandezze sono omogenee, si ha:

$$(A + C) : (B + D) = C : D$$

$$(A - C) : (B - D) = C : D$$

proporzioni che si possono enunciare nel modo seguente:

In una proporzione fra grandezze omogenee la somma, o la differenza, degli antecedenti sta alla somma, o alla differenza, dei conseguenti come un antecedente al suo conseguente.

Infatti, permutando i medi nella proporzione data si ha:

$$A : C = B : D$$

e per il caso precedente a)

$$(A \pm C) : C = (B \pm D) : D$$

da cui permutando

$$(A \pm C) : (B \pm D) = C : D$$

ed anche (3.º a)

$$(A + C) : (B + D) = (A - C) : (B - D)$$

In generale poi se:

$$A : B = C : D = E : F = \dots$$

si ha:

$$(A + C + E + \dots) : (B + D + F + \dots) = A : B$$

cioè: Data una serie di rapporti eguali fra grandezze omogenee, la somma degli antecedenti sta a quella dei conseguenti, come un antecedente al suo conseguente.

COROLLARIO. Se: $A : B = C : D = E : F = \dots$
ed è

$$A = C + E + \dots$$

è pure

$$B = D + F + \dots$$

Infatti poichè

$$C : D = E : F = \dots$$

si deduce

$$(C + E + \dots) : (D + F + \dots) = C : D$$

ma

$$A : B = C : D$$

dunque

$$(C + E + \dots) : (D + F + \dots) = A : B$$

ora se

$$A = C + E + \dots$$

anche (n. 282 Teor.).

$$B = D + F + \dots$$

§ 6.º Grandezze direttamente proporzionali.

283. Due classi (o serie) di grandezze in corrispondenza univoca si dicono *direttamente proporzionali*, o semplicemente *proporzionali*, se il rapporto di due grandezze qualunque di una classe è eguale al rapporto delle corrispondenti dell'altra.

Ad es. prese due grandezze A e B (omogenee o non), se si fanno corrispondere le equimultiple, le equisummultiple e le equimultiple di equisummultiple delle due grandezze, si ottengono due classi

$$A, 2A, 3A, \dots mA, \dots \frac{1}{2}A, \frac{1}{3}A, \dots \frac{1}{n}A, \dots, \frac{m}{n}A, \dots$$

$$B, 2B, 3B, \dots mB, \dots \frac{1}{2}B, \frac{1}{3}B, \dots \frac{1}{n}B, \dots, \frac{m}{n}B, \dots$$

che sono direttamente proporzionali. Infatti prese due grandezze $\frac{m}{n}A, \frac{p}{q}A$ della prima classe e le corrispondenti $\frac{m}{n}B, \frac{p}{q}B$ della seconda, è evidente che si ha:

$$\frac{m}{n}A : \frac{p}{q}A = \frac{m}{n}B : \frac{p}{q}B$$

perchè la proporzione fra le quattro grandezze è una conseguenza della proporzione

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n} : \frac{p}{q}$$

fra i quattro numeri (n. 281).

284. Le condizioni necessarie e sufficienti perchè due classi in corrispondenza univoca sieno proporzionali sono:

1.° che a grandezze eguali di una classe corrispondano grandezze eguali dell'altra:

2.° che se una grandezza di una classe è eguale alla somma di altre due, anche la corrispondente della prima sia eguale alla somma delle corrispondenti alle altre due. Il che si esprime brevemente dicendo che: *perchè due classi di grandezze sieno proporzionali è necessario e sufficiente che si corrispondano nell'eguaglianza e nella somma.*

1.° *Le condizioni sono necessarie.*

Sieno $A_1 \ A_2 \ A_3 \dots A_n$
 $B_1 \ B_2 \ B_3 \dots B_n$

due classi di grandezze proporzionali, e sia ad esempio $A_1 = A_2$; poichè per ipotesi:

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2$$

si deduce che $B_1 = B_2$; cioè vi è corrispondenza nella eguaglianza.

Sia ora $A_3 = A_1 + A_2$; dalla proporzione precedente si deduce:

$$A_1 : (A_1 + A_2) = B_1 : (B_1 + B_2)$$

d'altra parte per ipotesi:

$$A_1 : A_3 = B_1 : B_3$$

dalle quali due proporzioni coi primi tre termini ordinatamente eguali si deduce; $B_3 = B_1 + B_2$; cioè vi è corrispondenza nella somma.

2.° *Le condizioni sono sufficienti.* Sieno:-

$A_1, A_2, \dots A_n$
 $B_1, B_2, \dots B_n$

due classi di grandezze che si corrispondano nell'eguaglianza e nella somma; dico che le due classi sono proporzionali.

Proveremo anzitutto che a grandezze diseguali corrispondono grandezze diseguali nello stesso senso

e che se una grandezza di una classe è multipla o summultipla di un'altra, la corrispondente della prima è equimultipla od equisummultipla della corrispondente dell'altra.

1.° Sia $A_1 > A_2$: ciò equivale a dire che A_1 può considerarsi eguale alla somma di A_2 e di un'altra grandezza A_k della stessa classe, cioè $A_1 = A_2 + A_k$. Se ad A_2 ed A_k corrispondono rispettivamente B_2 e B_k , ad $A_2 + A_k$ corrisponde per ipotesi $B_2 + B_k$; di più ad A_1 corrisponde B_1 : ma è $A_1 = A_2 + A_k$, dunque (per la corrispondenza nell'eguaglianza) deve essere $B_1 = B_2 + B_k$, da cui $B_1 > B_2$; cioè vi è corrispondenza nella disequaglianza.

2.° Se ad A_1 corrisponde B_1 , ad $A_1 + A_1$, cioè a $2A_1$, corrisponde per ipotesi $B_1 + B_1$, cioè $2B_1$; a $2A_1 + A_1$, cioè a $3A_1$, corrisponde $2B_1 + B_1$, cioè $3B_1$; e così in generale ad nA_1 corrisponde nB_1 ; cioè vi è corrispondenza nelle multiple. Così pure ad $\frac{1}{n} A_1$ deve

corrispondere $\frac{1}{n} B_1$: difatti se si indica con B_k la corrispondente di $\frac{1}{n} A_1$, si avrà che ad $n \cdot \frac{1}{n} A_1$, cioè ad A_1 , corrisponde nB_k ; ma ad A_1 corrisponde B_1 , dunque $nB_k = B_1$, da cui $B_k = \frac{1}{n} B_1$; cioè vi è corrispondenza nelle summultiple ⁽¹⁾.

Ciò premesso, se A_1, A_2 sono due grandezze d'una classe e B_1, B_2 le corrispondenti della seconda dico che:

(1) S'intende che ogni grandezza ottenuta combinando per addizione o per sottrazione le grandezze d'una classe fa parte della classe stessa, e deve avere la sua corrispondente nell'altra.

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2$$

Distingueremo tre casi: il rapporto $A_1 : A_2$ può essere intero, frazionario, incommensurabile.

1.° CASO. Sia $A_1 : A_2 = m$ (intero), ossia: $A_1 = mA_2$. Poichè ad A_2 corrisponde B_2 , ad mA_2 corrisponde mB_2 : ma è $A_1 = mA_2$, dunque $B_1 = mB_2$, ossia

$$B_1 : B_2 = m$$

perciò

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2$$

2.° CASO. Sia $A_1 : A_2 = m : n$, ossia $A_1 = \frac{m}{n} A_2$.

Poichè ad A_2 corrisponde B_2 , ad $\frac{1}{n} A_2$ corrisponde $\frac{1}{n} B_2$, ed a $\frac{m}{n} A_2$, $\frac{m}{n} B_2$: ma è $A_1 = \frac{m}{n} A_2$, dunque $B_1 = \frac{m}{n} B_2$, ossia

$$B_1 : B_2 = m : n,$$

perciò

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2.$$

3.° CASO. Sia $A_1 : A_2$ incommensurabile; si trovino le due serie convergenti di numeri:

$$\frac{m+1}{n} \geq \frac{m'+1}{n'} \dots, \quad \frac{m}{n} \leq \frac{m'}{n'} \leq \dots$$

che hanno per limite il rapporto $A_1 : A_2$. Presa una coppia qualunque di numeri corrispondenti $\frac{m+1}{n}$,

$\frac{m}{n}$ si ha:

$$\frac{m+1}{n} > \frac{A_1}{A_2} > \frac{m}{n}$$

ossia

$$\frac{m+1}{n} A_2 > A_1 > \frac{m}{n} A_2.$$

Poichè ad A_2 corrisponde B_2 , ad $\frac{m+1}{n} A_2$ ed $\frac{m}{n} A_2$ corrispondono rispettivamente $\frac{m+1}{n} B_2$ e $\frac{m}{n} B_2$; e poichè A_1 è compresa fra $\frac{m+1}{n} A_2$ ed $\frac{m}{n} A_2$ anche B_1 sarà compresa fra $\frac{m+1}{n} B_2$ e $\frac{m}{n} B_2$, (n. 260, 1.^o), cioè:

$$\frac{m+1}{n} B_2 > B_1 > \frac{m}{n} B_2$$

da cui

$$\frac{m+1}{n} > \frac{B_1}{B_2} > \frac{m}{n}$$

il che equivale a dire che i due rapporti $A_1 : A_2$ e $B_1 : B_2$ sono compresi fra le stesse serie convergenti di numeri, (cioè hanno i medesimi valori approssimati sia per difetto che per eccesso, qualunque sia il grado di approssimazione): dunque sono eguali.

Per indicare che due classi di grandezze $A_1, A_2, A_3 \dots B_1, B_2, B_3 \dots$ sono proporzionali, si scrive:

$$A_1 : A_2 : A_3 : \dots = B_1 : B_2 : B_3 : \dots$$

Vediamone alcuni esempi.

285. TEOREMA. *In uno stesso cerchio od in cerchi eguali gli angoli al centro sono proporzionali agli archi ed ai settori corrispondenti* (n. 133).

286. 1.^o TEOREMA. *I rettangoli di eguale altezza sono proporzionali alle basi.*

Siano i rettangoli ABGH, BCFG, CDEF... (fig. 138) di eguale altezza; dico che sono proporzionali alle corrispondenti basi AB, BC, CD... Infatti se $AB = CD$, anche i corrispondenti rettangoli ABGH, CDEF sono eguali; di più ad una base BD, somma delle basi BC, CD, corrisponde il rettangolo BDEG, somma dei corrispondenti rettangoli BCFG, CDEF: dunque due rettangoli qualunque ABGH, BCFG stanno come le loro basi, cioè

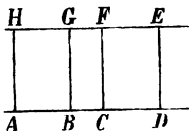


Fig. 138.

$$ABGH : BCFG = AB : BC.$$

OSSERVAZIONE. Lo stesso teorema si può enunciare anche così:

TEOREMA. *I rettangoli d' eguale base sono proporzionali alle altezze.*

COROLLARIO 1.^o *Gli stessi teoremi valgono per i parallelogrammi e per i triangoli.*

COROLLARIO 2.^o *In un triangolo rettangolo i quadrati della ipotenusa e dei cateti sono proporzionali rispettivamente alla ipotenusa ed alle proiezioni dei cateti sulla ipotenusa.*

Si sostituiscano ai quadrati dei cateti i rettangoli equivalenti giusta il teor. 203.

Reciprocamente:

2.^o TEOREMA. *Se due rettangoli (o parallelogrammi o triangoli) stanno come le basi, le corrispondenti altezze sono eguali.*

Sieno due rettangoli R , R' e siano b , b' ed a , a' le basi e le altezze rispettive. Posto che

$$R : R' = b : b'$$

dico che $a = a'$. Infatti, detto R'' il rettangolo di base b' e di altezza a , si ha (1.^o):

$$R : R'' = b : b'$$

e dalle due proporzioni si deduce $R' = R''$. Ma i due rettangoli R' , R'' essendo equivalenti e della stessa base b' , devono avere altezze eguali; dunque $a = a'$.

287. 1.° TEOREMA. *In un triangolo la bisettrice di un angolo divide il lato opposto in due parti proporzionali agli altri due lati.*

Sia ABC un triangolo ed AD la bisettrice dell'angolo $\widehat{A}$: dico che $AB : AC = BD : DC$.

Infatti i $\triangle ABD$, ACD hanno la stessa altezza rispetto al vertice A , epperò sono proporzionali alle basi corrispondenti, cioè:

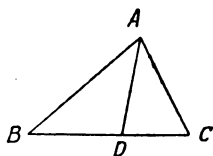


Fig. 139.

$$ABD : ACD = BD : DC.$$

I medesimi triangoli hanno eguali altezze rispetto al vertice D (n. 139), epperò sono proporzionali alle basi corrispondenti, cioè:

$$ABD : ACD = AB : AC$$

dalle due proporzioni si deduce appunto (n. 282, 3° a.):

$$AB : AC = BD : DC.$$

Reciprocamente:

2.° TEOREMA. *Se in un triangolo una retta condotta da un vertice divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati, quella retta è bisettrice dell'angolo del triangolo in quel vertice.*

Sia ABC un triangolo, e la AD divida il lato opposto BC in D in modo che: $BD : DC = AB : AC$; dico che AD è bisettrice dell'angolo $\widehat{A}$.

Infatti i due triangoli ABD , ADC hanno la stessa altezza rispetto al vertice A , perciò:

$$ABD : ADC = BD : DC.$$

Da questa proporzione e dalla precedente si deduce:

$$ABD : ADC = AB : AC$$

e poichè i due triangoli ABD, ADC stanno come i lati AB, AC, le altezze corrispondenti sono eguali, cioè il punto D è equidistante dai lati AB, AC, epperò AD è bisettrice dell'angolo $\widehat{A}$ (n. 131).

288. 1.° TEOREMA. *In un triangolo la bisettrice di un angolo esterno incontra il lato opposto (se gli altri due lati non sono eguali) in un punto tale che le sue distanze dagli estremi del lato sono proporzionali agli altri due lati.*

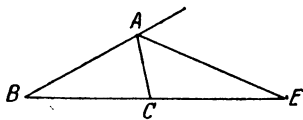


Fig. 140.

Sia ABC il triangolo (fig. 140) ed AE bisettrice dell'angolo esterno in A; si ha:

$$BE : CE = AB : AC.$$

Reciprocamente:

2.° TEOREMA. *In un triangolo se una retta condotta per un vertice incontra il prolungamento del lato opposto in un punto tale che le sue distanze dagli estremi del lato sieno proporzionali agli altri due lati, quella retta è bisettrice dell'angolo esterno al triangolo in quel vertice.*

Sia ABC il triangolo ed AE incontri il prolungamento del lato BC in E in modo che:

$$BE : CE = AB : AC.$$

La AE è bisettrice dell'angolo esterno in A.

Le dimostrazioni sono affatto analoghe a quelle dei n. 287, 1.° e 2.°.

OSSERVAZIONE. Se il triangolo ABC è isoscele, la bisettrice dell'angolo in A dimezza il lato BC;

e la bisettrice dell'angolo esterno in A è parallela a BC.

289. TEOREMA. *Se due classi di grandezze omogenee ed in corrispondenza univoca $A_1, A_2, \dots, A_n$; $B_1, B_2, \dots, B_n$ sono proporzionali, sono eguali i rapporti fra ciascuna grandezza della prima e la corrispondente della seconda, cioè*

$$A_1 : B_1 = A_2 : B_2 = \dots = A_n : B_n = \dots$$

Infatti per ipotesi

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2, \quad A_2 : A_3 = B_2 : B_3, \dots$$

dalle quali proporzioni permutando i medi (il che è lecito trattandosi di grandezze omogenee)

$$A_1 : B_1 = A_2 : B_2, \quad A_2 : B_2 = A_3 : B_3, \dots$$

ossia

$$A_1 : B_1 = A_2 : B_2 = A_3 : B_3, \dots$$

OSSERVAZIONE 1.^a Questo teorema si esprime anche dicendo, che è *costante* il rapporto tra una grandezza di una classe e la corrispondente dell'altra. Tale rapporto costante si dice *coefficiente di proporzionalità* della prima classe alla seconda.

OSSERVAZIONE 2.^a Se le due classi di grandezze proporzionali non sono omogenee, allora non è il rapporto tra le grandezze corrispondenti (che in questo caso non ha senso), ma il rapporto fra i loro valori che è costante: perchè i loro valori, essendo numeri possono sempre permutarsi, come medi di una proporzione. E in questo senso che il fisico dice ad es. che il rapporto fra lo spazio ed il tempo è costante nel moto uniforme; volendo dire che, poichè il rapporto di due spazi è eguale a quello dei tempi impiegati a percorrerli, se si indicano con s, s' i valori dei primi e t, t' quelli dei secondi si ha

$$s : s' = t : t'$$

da cui

$$s : t = s' : t'$$

ma, ripetiamo, lo scambio dei medi è lecito, perchè con quelle lettere s'intendono i *valori* delle grandezze e non le grandezze stesse.

290. TEOREMA. *Se due serie di grandezze omogenee e proporzionali sono entrambe crescenti (o decrescenti) limitatamente, il rapporto costante fra le corrispondenti grandezze delle due serie è eguale al rapporto dei loro limiti.*

Siano le due serie

$$A_1 \leq A_2 \leq A_3 \dots \leq A_n \leq \dots \text{ e } B_1 \leq B_2 \leq \dots B_n \leq \dots$$

e sia

$$A_1 : B_1 = A_2 : B_2 = \dots = k$$

se A e B sono i limiti delle due serie, dico che

$$A : B = k$$

Infatti sia C la quarta proporzionale dopo A_n , B_n (cioè due qualunque grandezze corrispondenti) ed A ; cioè sia

$$A_n : B_n = A : C$$

intanto per essere $A > A_n$ sarà anche $C > B_n$.

Di più dalla proporzione si ha

$$(A - A_n) : (C - B_n) = A_n : B_n = k$$

Sia ora la frazione $\frac{m}{n} < k$. Si deduce

$$A - A_n > \frac{m}{n} (C - B_n)$$

da cui

$$C - B_n < \frac{n}{m} (A - A_n)$$

ma la serie delle differenze $A - A_n$ per ipotesi de-

cresce illimitatamente; lo stesso avviene adunque della serie $C - B_n$ (n. 247 Còr.), il che prova che C è il limite della seconda serie (n. 241): ma lo è anche B , dunque $C = B$; perciò

$$A_n : B_n = A : B.$$

§ 8. Grandezze inversamente proporzionali.

291. Due classi o serie di grandezze in corrispondenza univoca si dicono *inversamente* o *reciprocamente proporzionali*, se il rapporto di due grandezze della prima è uguale al reciproco rapporto delle corrispondenti della seconda.

Ad es. prese due grandezze A e B (omogenee o non), se alle multiple ed alle summultiple della prima si fanno corrispondere rispettivamente le summultiple e le multiple dell'altra secondo lo stesso numero ed alle multiple delle summultiple della prima le summultiple delle multiple secondo lo stesso numero dell'altra, si ottengono due classi

$$A, 2A, \dots mA, \dots \quad \frac{1}{2}A, \frac{1}{3}A, \dots \quad \frac{1}{n}A, \dots \quad \frac{m}{n}A, \dots \quad \frac{p}{q}A, \dots \\ B, \frac{1}{2}B, \dots \quad \frac{1}{m}B, \dots \quad 2B, 3B, \dots nB, \dots \quad \frac{n}{m}B, \dots \quad \frac{q}{p}B, \dots$$

che sono inversamente proporzionali. Infatti, prese due grandezze $\frac{m}{n}A, \frac{p}{q}A$ della prima classe e le corrispondenti $\frac{n}{m}B, \frac{q}{p}B$ della seconda, è evidente che si ha

$$\frac{m}{n}A : \frac{p}{q}A = \frac{q}{p}B : \frac{n}{m}B$$

perchè la proporzione fra le quattro grandezze è una conseguenza della proporzione

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{q}{p} : \frac{n}{m}$$

fra i quattro numeri (n. 281).

In particolare poi (supposto $A = B$) una grandezza A è media proporzionale fra una sua multipla e l'equisummultipla; cioè

$$mA : A = A : \frac{1}{m} A.$$

292. 1.° TEOREMA. *Se più rettangoli sono equivalenti le loro basi sono inversamente proporzionali alle loro altezze.*

Sieno $R, R', R'' \dots$ più rettangoli equivalenti: $a, a', a'' \dots$ le altezze, $b, b', b'' \dots$ le basi corrispondenti. Si costruisca un rettangolo K di base eguale a b e di altezza eguale ad a' . Si avrà (n. 286, 1°):

$$R : K = a : a' \quad \text{e} \quad R' : K = b' : b$$

ma essendo $R = R'$, anche

$$R : K = R' : K$$

perciò:

$$a : a' = b' : b$$

COROLLARIO 1.° *Lo stesso teorema vale per i parallelogrammi e per i triangoli.*

In particolare poi in un dato parallelogrammo o triangolo le basi sono inversamente proporzionali alle altezze corrispondenti.

COROLLARIO 2.° *Se un quadrato equivale ad un rettangolo, il lato del quadrato è medio proporzionale fra i lati del rettangolo.*

Reciprocamente:

2.° TEOREMA. *Se due classi di segmenti $a, a', a'' \dots$; $b, b', b'' \dots$ sono inversamente proporzionali, i rettan-*

goli dei segmenti corrispondenti, cioè i rettangoli $a.b$, $a'.b'$, ... sono equivalenti.

Sieno $R = a.b$, $R' = a'.b'$: si costruisca il rettangolo K di base b e di altezza a' . Si avrà

$$R : K = a : a' \quad \text{ed} \quad R' : K = b' : b$$

ma per ipotesi

$$a : a' = b' : b$$

perciò (n. 282 3.º)

$$R : K = R' : K$$

da cui (n. 282, 1.º Teor.)

$$R = R'.$$

Più in particolare si può dire che:

Se quattro segmenti sono in proporzione, il rettangolo dei medi equivale a quello degli estremi.

COROLLARIO. *Se un segmento è medio proporzionale fra altri due, il quadrato del medio equivale al rettangolo degli altri due.*

293. Come applicazione del Teor. 292, Cor. 2.º, diamo questi due teoremi la cui dimostrazione è ovvia.

1.º *Nel triangolo rettangolo:*

a) *un cateto è medio proporzionale fra l'ipotenusa e la sua proiezione su di essa* (n. 203).

b) *l'altezza (relativa all'ipotenusa) è media proporzionale fra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa* (n. 214).

2.º *Data una circonferenza O ed un punto M , siano P, Q gli estremi della corda minima (n. 140, oss.) condotta per M , se questo è interno (fig. 141 a)); o i punti di contatto delle tangenti condotte da M , (fig. 141 b) se questo è esterno. Ciò posto, se si conducono da M delle secanti AA' , BB' , CC' ... alla circonferenza,*

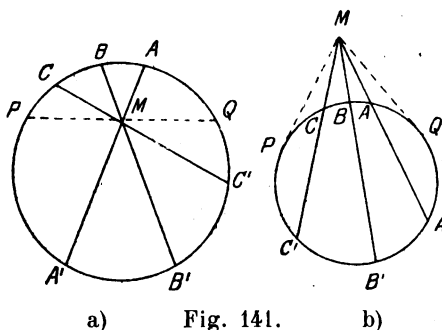


Fig. 141.

i segmenti MA , MB , ..., che terminano ad uno degli archi PQ sono inversamente proporzionali ai corrispondenti segmenti MA' , MB' , ... che termina-

no all'altro arco PQ (n. 219).

OSSERVAZIONE. Se il punto M è interno, la semicorda minima MP è media proporzionale fra i due segmenti MA , MA' di una corda.

Se il punto M è esterno, la tangente MP è media proporzionale fra i due segmenti di una secante MA, MA' .

294. TEOREMA. Se due classi di grandezze $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots, B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ sono inversamente proporzionali, è costante il prodotto dei valori delle grandezze corrispondenti.

Se $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, e $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ sono i valori delle due classi di grandezze, siccome per ipotesi

$$A_1 : A_2 = B_2 : B_1$$

si ha pure (n. 281)

$$a_1 : a_2 = b_2 : b_1$$

da cui

$$a_1 b_1 = a_2 b_2$$

Similmente si dimostrano le altre eguaglianze cioè:

$$a_1 b_1 = a_2 b_2 = \dots = a_n b_n$$

§ 9.° Misura dei segmenti, degli angoli ecc. e dei poligoni.

295. Passiamo alla misura delle grandezze geometriche finora considerate. Notiamo che in pratica le grandezze si considerano come incommensurabili coll'unità di misura: perciò fissata l'unità di misura, la si divide in un certo numero di parti eguali, numero che si fa diventare sempre più grande mano mano che si desidera una maggiore approssimazione, e si procede come si è detto al n. 250, trovando in ogni caso una misura approssimata.

296. MISURA DEI SEGMENTI. L'unità di misura è il *metro* ⁽¹⁾, che si divide in 10, 100, 1000...; parti eguali (Vedi sistema metrico decimale). Si misura un segmento col noto processo della divisione, cercando quanti metri, decimetri... contiene: la misura di un segmento dicesi la sua *lunghezza*.

297. MISURA DEGLI ANGOLI. L'unità di misura degli angoli è l'*angolo retto*. Esso si suppone diviso in 90 parti eguali dette *gradi* ⁽²⁾: il grado in 60 *minuti primi* (per brevità si dice o solo *minuti* o solo *primi*); il minuto primo in 60 *minuti secondi* (o *secondi*): qualche volta occorrendo una maggiore

⁽¹⁾ Teoricamente il metro si definisce come la 40000000^a parte del meridiano terrestre; ma il prototipo esistente negli Archivi di Stato di Francia (dal quale si deducono i metri campione) differisce dal metro teorico di circa 0,2 di millimetro.

⁽²⁾ Teoricamente parlando non si può dividere l'angolo retto in 90 parti eguali: ma praticamente la divisione si ottiene con tale approssimazione da non essere assolutamente apprezzabili le differenze tra le divisioni stesse.

approssimazione si divide il secondo in decimi e centesimi. Così si dice un angolo di 35 gradi, 24 primi e 56 secondi e si scrive: 35°, 24', 56".

La misura di un angolo dicesi la sua *ampiezza* (o *apertura*).

298. MISURA DEGLI ARCHI. L'unità di misura degli archi (in una data circonferenza) è il *quadrante*, che si suppone diviso nello stesso modo che l'angolo retto ⁽¹⁾; dimodochè la *misura circolare* o *ampiezza* degli archi si enuncia e si scrive come quella degli angoli.

La ragione della scelta sta in questo. È noto che nello stesso cerchio od in cerchi eguali gli angoli al centro sono proporzionali agli archi compresi; perciò detto $\widehat{R}$ l'angolo retto e Q il quadrante di una data circonferenza (che è l'arco che gli corrisponde), si avrà (n. 285).

$$\frac{\text{ang. al centro}}{\widehat{R}} = \frac{\text{arco corr.}}{Q}$$

cioè

1.° TEOREMA. *La misura di un angolo al centro è eguale a quella dell'arco corrispondente.*

(1) E stata proposta dalla Commissione del metro una nuova divisione del quadrante e dell'angolo retto secondo il sistema decimale. Il quadrante (l'angolo retto) viene diviso in 100 gradi, il grado in 100 *minuti primi*, il minuto primo in 100 *minuti secondi*. Si ha così il vantaggio che la misura di un arco (di un angolo) è espressa da un numero decimale più comodo pei calcoli: poichè ad esempio un angolo di 35 gradi, 24 primi e 56 secondi, prendendo per unità il grado, è rappresentato da 35,2456 oppure, prendendo per unità il quadrante (l'angolo retto) da 0,352456. Ad onta di questo la nuova divisione trova delle difficoltà ad essere accettata per ragioni che non è qui il caso di esporre.

Si ha così il vantaggio che un angolo qualunque ha la stessa misura che l'arco corrispondente descritto con raggio qualunque e col centro nel vertice.

2.° Così dal teorema 149 si ha :

TEOREMA. *La misura dell'angolo iscritto è la metà di quella dell'arco corrispondente.*

299. MISURA DEI SETTORI. L'unità di misura dei settori (in un dato cerchio) è il *quadrante* di cerchio, che si divide come l'angolo retto per la stessa ragione data pel quadrante di circonferenza; perciò *la misura di un settore è eguale a quella dell'angolo al centro corrispondente.*

Anche per queste grandezze si ottiene la misura, come pei segmenti, colla divisione.

300. MISURA DEI POLIGONI. La misura dei poligoni non si trova nel modo usato per le grandezze finora considerate, perchè ciò riescirebbe assai malagevole e talvolta impossibile; ma si ottiene indirettamente, eseguendo opportune operazioni sulle misure di certi elementi lineari, come segue.

L'unità di misura è il quadrato dell'unità lineare: la scelta di questa unità è giustificata dal seguente

301. TEOREMA. *Il rapporto di due rettangoli è uguale al prodotto del rapporto delle loro basi per quello delle altezze.*

Sieno per brevità R , R' due rettangoli qualunque, b , b' le loro basi, a , a' le altezze corrispondenti. Si costruisca un terzo rettangolo R'' di base eguale a b' e di altezza eguale ad a . Pel teorema n. 286 si ha

$$\frac{R}{R''} = \frac{b}{b'} \quad \text{e} \quad \frac{R'}{R} = \frac{a}{a'}$$

ma (n. 277, 1°)

$$\frac{R}{R'} = \frac{R}{R''} \times \frac{R''}{R}$$

e sostituendo

$$\frac{R}{R'} = \frac{b}{b'} \times \frac{a}{a'}$$

COROLLARIO. *Il rapporto di due quadrati è uguale alla seconda potenza (quadrato) del rapporto dei lati, cioè:*

$$\frac{a^2}{a'^2} = \left(\frac{a}{a'} \right)^2.$$

302. Da questo teorema e da quanto si è detto sull'unità di misura dei poligoni si ha

$$\frac{\text{Rettangolo}}{\text{unità superf.}} = \frac{\text{base}}{\text{unità lin.}} \times \frac{\text{altezza}}{\text{unità lin.}}$$

cioè

La misura, o, come si dice, l'area del rettangolo è data dal prodotto della base per quella dell'altezza; il che più brevemente si enuncia dicendo: l'area del rettangolo è data dal prodotto della base per l'altezza; sottintendendo la parola misura (1).

COROLLARIO. Dai teoremi sui poligoni equivalenti si ha:

1.° *L'area del quadrato è data dalla seconda potenza (quadrato) del lato (n. 198).*

2.° *L'area del parallelogrammo è data dal prodotto della base per l'altezza (n. 198).*

(1) Questo faremo anche noi d'ora innanzi dicendo angolo, lato, base, altezza, ecc.... invece di misura dell'angolo, del lato ecc.

3.° *L'area del triangolo è data dalla metà del prodotto della base per l'altezza (n. 199).*

4.° *L'area del trapezio è data dal prodotto della semisomma delle basi per l'altezza (n. 200).*

5.° *L'area del poligono circoscritto ad un cerchio è data dal prodotto del semi-perimetro del poligono pel raggio del cêrchio (apotema del poligono) (n. 201).*

§ 10.° Applicazioni della teoria della misura.

303. Da quanto è stato detto sulla misura delle grandezze si deduce, che un teorema geometrico esprimente una relazione metrica tra grandezze si può tradurre in una relazione tra due espressioni numeriche omogenee col sostituire a queste grandezze le loro misure: relazione che esprimerà un teorema algebrico, oppure che permetterà di calcolare la misura di una di quelle grandezze, quando siano note le altre. Vediamone qualche esempio.

a) Indicando con a , b , c le lunghezze dell'ipotenusa e dei cateti di un triangolo rettangolo, con x ed y le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa e con h l'altezza,

1.° dal teorema di Pitagora (n. 204) si ha:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

dalla quale colle note regole del calcolo si ottiene

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} \quad \text{e} \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

che permettono di calcolare un lato di un triangolo rettangolo conoscendo gli altri due.

2.° dal teorema n. 203 si ha:

$$b^2 = ax, \quad c^2 = ay,$$

da cui

$$x = \frac{b^2}{a}, \quad y = \frac{c^2}{a},$$

che permettono di calcolare la proiezione di un cateto per mezzo del cateto stesso e dell'ipotenusa.

3.º dal teorema n. 204 si ha $h^2 = xy$; sostituendo i valori di x ed y

$$h^2 = \frac{b^2 c^2}{a^2}, \quad \text{da cui} \quad h = \frac{bc}{a}$$

ed anche

$$h = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$$

formola che dà l'altezza, noti i cateti.

b) Così i teoremi n. 211, 212, 213 si traducono nelle note formole

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \\ a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

304. Reciprocamente una formola algebrica omogenea può tradursi in un teorema geometrico: così per es. le formole ricordate (ritenendo le lettere a, b come misure di segmenti) si traducono nei teoremi n. 211, 212, 213, già dimostrati geometricamente.

Così pure dalle formole $b^2 = ax$, $c^2 = ay$, $h = xy$ per un teorema sulle proporzioni aritmetiche si ha

$$a : b = b : x, \quad a : c = c : y, \quad x : h = h : y$$

le quali (ove le lettere abbiano il significato loro attribuito al n. 303) si traducono nel teorema 1.º del n. 293.

305. PROBLEMA. *Dati i lati d'un triangolo, trovare le mediane.*

Siano a, b, c ⁽¹⁾ i lati BC, CA, AB del triangolo ABC; m_a, m_b, m_c le mediane corrispondenti. Dal teorema n. 218 si ha

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

dalla quale colle note regole dell'algebra si deduce

$$m_a = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$$

in modo analogo si ricavano le altre due.

306. PROBLEMA. *Dati i lati d'un triangolo, trovare le altezze e l'area.*

Siano a, b, c i lati BC, CA, AB del triangolo ABC (fig. 107 e 108); h_a, h_b, h_c le altezze corrispondenti ed x la proiezione di AB su AC. Dal triangolo BDA si ha:

$$h_b^2 = c^2 - x^2:$$

d'altra parte pel teorema n. 216 si ha ancora

$$a^2 = b^2 + c^2 \pm 2bx,$$

da cui

$$\mp x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$$

ed anche

$$x^2 = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2}$$

perciò sostituendo

$$h_b^2 = c^2 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2}$$

formola che dà la h_b in funzione dei lati, ma che non è comoda per i calcoli.

(1) Si usa indicare le lunghezze dei lati di un triangolo colle lettere minuscole eguali alle maiuscole dei vertici opposti.

Eseguendo la differenza indicata si ha

$$h_b^2 = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2} =$$

$$\frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}{4a^2} =$$

$$\frac{[(b + c)^2 - a^2][a^2 - (b - c)^2]}{4b^2} =$$

$$\frac{(b + c + a)(b + c - a)(a + b - c)(a - b + c)}{4b^2}$$

Pongasi ora $a + b + c = 2p$; sottraendo successivamente $2a$, $2b$, $2c$, si ha

$$b + c - a = 2p - 2a = 2(p - a).$$

$a - b + c = 2(p - b)$. $a + b - c = 2(p - c)$
sostituendo e riducendo

$$h_b^2 = \frac{4p(p - a)(p - b)(p - c)}{b^2}$$

e finalmente

$$h_b = \frac{2}{b} \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

analogamente si otterrebbe

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

$$h_c = \frac{2}{c} \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

Indicando ora con s l'area del triangolo si ha:

$$s = \frac{ah_a}{2}; \text{ sostituendo il valore di } h_a \text{ e riducendo}$$

$$s = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

OSSERVAZIONE. Se il triangolo è equilatero ed è a il lato ed h l'altezza, si ha: $p = \frac{3a}{2}$ e le formole precedenti diventano

$$h = \frac{a}{2} \sqrt{3}, \quad s = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}$$

formole che si ottengono anche direttamente con facilità.

307. PROBLEMA. *Dati i lati d'un triangolo, trovare le bisettrici degli angoli.*

Conservate le notazioni precedenti, siano inoltre d_a , d_b , d_c le bisettrici degli angoli $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$; ed x , y le parti in cui è diviso il lato a dalla d_a . Dal teor. 287 si ha

$$c : b = x : y$$

dalla quale, tenuto conto che $x + y = a$, si deduce

$$x = \frac{ac}{b+c}, \quad y = \frac{ab}{b+c}$$

D'altra parte dal teor. 221 si ha :

$$bc = d_a^2 + xy$$

sostituendo nell'ultima relazione i valori di x ed y , si deduce

$$d_a^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$$

da cui eseguendo le operazioni e riducendo

$$d_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)}$$

dove p è il semiperimetro del triangolo. In modo analogo si deducono le altre due.

308. PROBLEMA. *Dati i lati d'un triangolo trovare i raggi dei cerchi tangenti ai lati.*

Siano a , b , c i lati BC, CA, AB del triangolo ABC (fig. 90): indichiamo con r il raggio del cerchio iscritto e con r_a , r_b , r_c , i raggi dei cerchi ex-iscritti tangenti rispettivamente ai lati a , b , c . Intanto dal teorema n. 201 si ha :

$$s = pr \quad \text{da cui} \quad r = \frac{s}{p}.$$

Dalla figura 91 poi si ha

$$ABC = ABO_1 + ACO_1 - BCO_1$$

e sostituendo ai triangoli le loro misure

$$s = \frac{cr_a}{2} + \frac{br_a}{2} - \frac{ar_a}{2}, \quad \text{ossia} \quad s = \frac{c+b-a}{2} r_a$$

e per la convenzione fatta nel problema n. 306

$$s = (p - a)r_a$$

Analogamente si trova

$$s = (p - b)r_b, \quad s = (p - c)r_c$$

dalle quali si ha

$$r_a = \frac{s}{p - a}, \quad r_b = \frac{s}{p - b}, \quad r_c = \frac{s}{p - c}.$$

Sostituendo ora nelle formole dei quattro raggi invece di s il suo valore dato dal problema precedente e riducendo si ha

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}, \quad r_a = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$$

$$r_b = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}}, \quad r_c = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}$$

OSSERVAZIONE. Moltiplicando le quattro eguaglianze membro a membro e riducendo si ha

$r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c = s^2$, da cui $s = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$
che dà l'area del triangolo in funzione dei raggi dei cerchi tangenti ai lati.

309. PROBLEMA. *Dati i lati d' un triangolo, trovare il raggio del circolo circoscritto.*

Conservate le notazioni precedenti, sia R il raggio del circolo circoscritto. Dal teor. 222 si ha

$$bc = 2R \cdot h_a$$

e moltiplicando per a

$$abc = 2Rah_a$$

ma $ah_a = 2s$. Sostituendo e risolvendo rispetto ad R :

$$R = \frac{abc}{4s} = \frac{abc}{4 \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

310. PROBLEMA. *Dati i lati d' un triangolo calcolare il segmento che partendo da un vertice divide il lato opposto in due parti nel rapporto dato $m : n$.*

Sia ABC il triangolo (fig. 142) e sia la AD che divide il lato BC in due parti BD , DC tali che $BD : DC = m : n$.

Conservate le precedenti notazioni, dalla proporzione data si deduce (n. 282 4.º a)

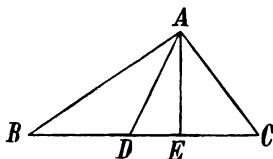


Fig. 142.

$$BD = \frac{m}{m+n}a, \quad CD = \frac{n}{m+n}a$$

di più dei due angoli in $\widehat{D}$ l'uno sarà in generale ottuso, l'altro acuto. Supposto $\widehat{ADB}$ ottuso, se si indica con x la proiezione DE di AD sopra DC , dal triangolo ADB pel teor. 216 si ha

$$c^2 = AD^2 + \frac{m^2}{(m+n)^2}a^2 + 2 \frac{m}{m+n}ax \quad (1)$$

e dal triangolo ACD

$$b^2 = AD^2 + \frac{n^2}{(m+n)^2}a^2 - 2 \frac{n}{m+n}ax \quad (2)$$

moltiplicando la (1) per n , la (2) per m ed aggiungendo membro a membro, si ha:

$$nc^2 + mb^2 = (m+n)AD^2 + \frac{m^2n + mn^2}{(m+n)^2}a^2$$

da cui

$$AD^2 = \frac{m}{m+n} b^2 + \frac{n}{m+n} c^2 - \frac{mn}{(m+n)^2} a^2$$

Se il punto D è sul prolungamento di BC (fig. 143) col medesimo procedimento si deduce

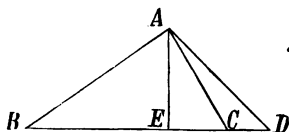


Fig. 143.

$$AD^2 = \frac{m}{m-n} b^2 - \frac{n}{m-n} c^2 + \frac{mn}{(m-n)^2} a^2$$

che differisce dalla prima pel segno del numero n .

Questa relazione è nota sotto il nome di *teorema di Stewart* ⁽¹⁾.

OSSERVAZIONE 1.^a Se il rapporto $m : n = 1$, la relazione diventa:

$$AD^2 = \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{2} c^2 - \frac{1}{4} a^2$$

ossia

$$AD^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

e si ricade nel problema 305, essendo AD la mediana m .

2.^a Se $m : n = b : c$, la relazione diventa

(1) Matteo Stewart, celebre geometra e fisico scozzese, visse dal 1717 al 1785. Uscito dal collegio di Glasgow passò all' Università di Edimburgo, dove fu allievo di Simpson e di Mac-Laurin e successore di quest' ultimo. Fra le principali sue opere notiamo:

Propositiones geometricae ecc. divise in due libri, l' uno di 60, l' altro di 52 proposizioni relative alla retta ed al cerchio.

De quibusdam theoremis generalibus ecc., tra i quali evvi quello più sopra citato.

Un trattato di fisica e matematica, nella quale si occupa di questioni di meccanica celeste.

$$AD^2 = \frac{c}{b+c} b^2 + \frac{b}{b+c} c^2 - \frac{bc}{(b+c)^2} a^2$$

da cui

$$AD^2 = bc - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2}$$

e si ricade nel problema 307, essendo AD la bisettrice d_a .

311. PROBLEMA. *Date le lunghezze di due corde, trovare la lunghezza della corda sottesa dall'arco somma, ò dall'arco differenza dei due archi corrispondenti.*

Siano $\widehat{BA}$, $\widehat{AC}$ (fig. 144) i due archi che sottendono le corde a e b ; e si voglia calcolare la corda BC (sottesa dall'arco $\widehat{BC} = \widehat{BA} + \widehat{AC}$). Si conduca il diametro AD e si unisca D con B e con C. Indicando con r il raggio del cerchio e con x la corda BC, dai triangoli rettangoli ABC, ACD si ha

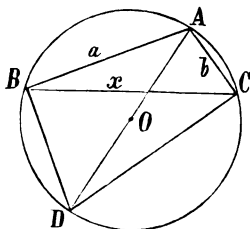


Fig. 144.

$$BD = \sqrt{4r^2 - a^2} \quad \text{e} \quad CD = \sqrt{4r^2 - b^2}$$

e dal quadrilatero ABDC pel teor. 223,

$$2rx = a \sqrt{4r^2 - b^2} + b \sqrt{4r^2 - a^2}$$

da cui

$$x = \frac{a \sqrt{4r^2 - b^2} + b \sqrt{4r^2 - a^2}}{2r}$$

Similmente se si indica con y la corda BC

(fig. 145), (sottesa dall'arco $\widehat{BC} = \widehat{AB} - \widehat{AC}$) e ritenuto $\widehat{AB} = a$, $\widehat{AC} = b$, si deduce

$$y = \frac{a\sqrt{4r^2 - b^2} - b\sqrt{4r^2 - a^2}}{2r}$$

312. Da questi pochi esempi si può arguire come l'algebra sia un utilissimo sussidio alla geometria (però non necessario), sia per la dimostrazione di teoremi che per la risoluzione di problemi.

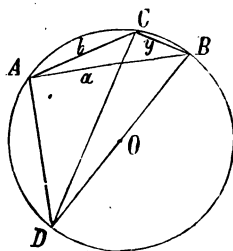


Fig. 145:

Riguardo a questi ultimi osserviamo che, tradotto come si suol dire il problema in equazione e risolta questa (o il sistema di equazioni), la formola risolutiva indica quali calcoli debbano farsi cogli elementi dati per ottenere il valore dell'incognita. Ma, invece di questo, può interessare talvolta la soluzione grafica del problema. Ora la stessa formola risolutiva suggerisce le costruzioni necessarie ad ottenerla. Per vedere in qual modo (e limitandoci a considerare solo qui problemi nei quali i dati e le incognite sono segmenti), passiamo in rassegna i tipi principali delle formole risolutive, ai quali poi si riducono gli altri che possono presentarsi ⁽¹⁾. Colle lettere $a, b, c, \dots$ si indicano i valori dei segmenti dati, colla x il segmento cercato.

(1) Le formole risolutive delle questioni geometriche devono essere *omogenee*, cioè i due membri dell'eguaglianza devono essere omogenei e dello stesso grado, altrimenti le formole non avrebbero alcun significato geometrico. Se talvolta questa condizione non si verifica in apparenza, ciò proviene dal fatto che uno dei segmenti che entra nella relazione è stato assunto come unità di misura. Ad es. se in

a) *Forme razionali.*

$$1.^a \quad x = a + b, \quad x = a - b, \quad (1) \quad x = ma$$

(dove m è un coefficiente razionale, come $7, \frac{5}{4}$, ecc.).

È ovvia in questi casi la costruzione del segmento x .

$$2.^a \quad x = \frac{ab}{c}. \text{ Dalla relazione si deduce:}$$

$$cx = ab;$$

la quale dice che si tratta di trasformare il rettangolo ab in un altro di base data c (n. 208).

Oppure fatto un angolo $\widehat{M}$ (lo studioso è pregato a far la figura), si prenda sopra un lato $MC = c$ ed $MA = a$, e sull'altro $MB = b$; si unisca C con B e da A si conduca la parallela a CB ad

un triangolo rettangolo si prende un cateto come unità di misura, detta a l'ipotenusa e b l'altro cateto, pel teorema di Pitagora si ha: $a^2 = b^2 + 1$; così, detta x la proiezione del cateto unità si ha $1 = \sqrt{ax}$. L'omogeneità allora viene ristabilita cambiando l'unità di misura: dette a', b', c', x' rispettivamente le misure dell'ipotenusa a , del cateto b , dell'altro cateto e della proiezione di questo, si ha che (n. 254)

$$a = \frac{a'}{c'}, \quad b = \frac{b'}{c'}, \quad x = \frac{x'}{c'}$$

perciò sostituendo le formole diventano

$$\left(\frac{a'}{c'}\right)^2 = \left(\frac{b'}{c'}\right)^2 + 1 \quad \text{e} \quad 1 = \sqrt{\frac{a'}{c'} \cdot \frac{x'}{c'}}$$

e moltiplicando la prima per c'^2 e la seconda per c' si ha:

$$a'^2 = b'^2 + c'^2 \quad \text{e} \quad c' = \sqrt{a' \cdot x'}$$

che sono omogenee.

(¹) Vi sarebbe qui a considerare la questione dei segni. Ma nella teoria della misura delle grandezze non avendo parlato che di numeri aritmetici od assoluti, si supporrà senz'altro che l'operazione $a - b$ sia possibile, cioè sia $a > b$:

incontrare in D la MB; sarà MD il segmento x . Infatti i triangoli MCB, MAD sono equiangoli, perciò (n. 220): $MC \cdot MD = MA \cdot MB$, ossia $c \cdot MD = a \cdot b$ ⁽¹⁾.

3.^a $x = \frac{a^2}{c}$. Si riduce al caso precedente, ove si ponga $a = b$. Oppure, osservando che $a^2 = cx$, si costruisca il triangolo rettangolo, di cui a è l'altezza e c la proiezione di un cateto.

La x è la proiezione dell'altro cateto (n. 214).

OSSERVAZIONE. A questi tipi si possono ridurre altri come i seguenti:

$x = \frac{abc}{de}$. Si costruisca prima $\frac{ab}{d} = h$ e si avrà: $x = \frac{hc}{e}$. E così per altre frazioni con un numero maggiore di fattori ai due termini, come $x = \frac{abcd}{fhil} = \frac{ab}{f} \cdot \frac{c}{h} \cdot \frac{d}{l}$ ecc.

Merita speciale considerazione la formola del tipo: $x = \frac{ab^m}{c^m}$. Essa può ridursi al caso precedente, ponendo: $\frac{ab}{c} = d, \frac{db}{c} = f, \dots$ ma può costruirsi più speditamente, come segue.

Si costruisca il triangolo rettangolo ABC (fig. 146) col- l'ipotenusa $AC = b$ (supposto $b > c$) e col cateto $AB = c$.

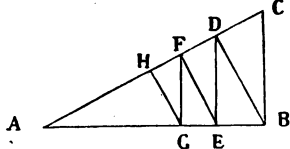


Fig. 146.

Si conduca BD perpendicolare alla AC, DE perpendicolare alla AB, EF alla AC, FG alla AB e così via. I triangoli ABC, BCD sono equiangoli, perciò (n. 220)

$AC \cdot BD = AB \cdot CB$; da cui (n. 292)

$$\frac{AC}{AB} = \frac{BC}{BD} \quad \text{cioè} \quad \frac{BC}{BD} = \frac{b}{c}$$

I triangoli BCD, BDE sono equiangoli, perciò:

(1) Vedasi in seguito il n. 347.

$$BD^2 = BC \cdot DE, \text{ da cui } \frac{BC}{BD} = \frac{BD}{DE}$$

Similmente dai triangoli equiangoli BDE, DEF, si deduce: $\frac{BD}{DE} = \frac{DE}{EF}$ e così di seguito.

Riassumendo si ha:

$$\frac{b}{c} = \frac{BC}{BD} = \frac{BD}{DE} = \frac{DE}{EF} = \frac{EF}{FG} = \dots$$

da cui si deduce (n. 253)

$$\frac{BC}{DE} = \frac{b^2}{c^2}, \quad \frac{BC}{EF} = \frac{b^3}{c^3}, \quad \frac{BC}{FG} = \frac{b^4}{c^4}, \dots$$

Se l'esponente m è un po' grande la costruzione può essere abbreviata talvolta nel modo seguente:

Si faccia il triangolo ABC rettangolo in A (fig. 147) coi cateti $AC = b$, $AB = c$.

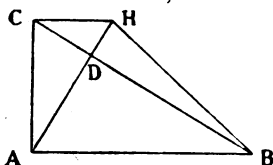


Fig. 147.

Condotta l'altezza AD si ha:

$$\frac{CD}{DB} = \frac{b^2}{c^2} \text{ (n. 286, Cor. 2º).}$$

Se da C si traccia la parallela alla AB ad incontrare in H la AD, dai triangoli CDH, BAC equiangoli si ha (n. 220):

$$c \cdot DH = b \cdot DC, \text{ da cui } \frac{DH}{DC} = \frac{b}{c}.$$

Ora

$$\frac{DH}{DB} = \frac{DH}{DC} \times \frac{DC}{BD}$$

sostituendo $\frac{DH}{DB} = \frac{b}{c} \times \frac{b^2}{c^2} = \frac{b^3}{c^3}$

Se ora sul triangolo rettangolo HDB si opera come sul triangolo CAB si possono dedurre i rapporti $\frac{b^6}{c^6}$ e $\frac{b^7}{c^7}$, e così via.

Nel caso poi che m fosse una potenza del 2, ecco come conviene procedere. Sia ancora lo stesso triangolo rettangolo ABC (fig.

148) e l'altezza AD; si ha $\frac{CD}{DB} = \frac{b^2}{c^2}$.

Prolunghisi AD di un segmento $DE = DC$; si conduca EB e da D si cali l'altezza DF del triangolo

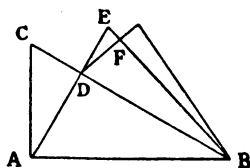


Fig. 148.

EDB. Si ha

$$\frac{EF}{FB} = \frac{DE^2}{DB^2} \quad \text{e poichè} \quad \frac{DE}{DB} = \frac{DC}{DB} = \frac{b^2}{c^2}$$

sostituendo
$$\frac{EF}{FB} = \frac{b^4}{c^4}.$$

E similmente si dedurranno i rapporti $\frac{b^8}{c^8}$, $\frac{b^{16}}{c^{16}}$, ecc.

Combinando in modo opportuno queste costruzioni si possono trovare due segmenti p, q tali che $\frac{p}{q} = \frac{b^m}{c^m}$; qualunque sia m ; da cui $x = \frac{ap}{q}$.

b) *Forme irrazionali.*

I tipi principali sono i seguenti:

$$x = \sqrt{ab} \quad , \quad x = \sqrt{a^2 + b^2} \quad , \quad x = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Elevando a quadrato

$$x^2 = ab \quad , \quad x^2 = a^2 + b^2 \quad , \quad x^2 = a^2 - b^2$$

Dalle quali relazioni risulta che il primo è il lato del quadrato equivalente al rettangolo ab (n. 205 o 215); il secondo l'ipotenusa del triangolo rettangolo che ha per cateti a e b ; il terzo un cateto del triangolo rettangolo di cui l'ipotenusa è a e l'altro cateto è b .

OSSERVAZIONE. La formola $x = ma$, quando m è un coefficiente irrazionale, e più particolarmente un radicale quadrato, cioè $m = \sqrt{h}$ (dove h è razionale), quadrando diventa: $x^2 = ha^2$; e ponendo $ha = b$, si ha $x^2 = ab$: ed è ricondotta al primo tipo. In alcuni casi si trova direttamente; così $x = a\sqrt{2}$ è diagonale del quadrato di lato a ; $x = a\sqrt{3}$ è un cateto del triangolo rettangolo che ha per ipotenusa $2a$ e per altro cateto a ; ecc.

A questi tipi si riducono altri come i seguenti:

1.° $x = \sqrt{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}$; pongasi $a^2 - b^2 = f^2$, $f^2 + c^2 = h^2$; sostituendo: $x = \sqrt{h^2 - d^2}$.

2.° $x = \sqrt{a^2 \pm bc}$; pongasi $bc = d^2$; si avrà
 $x = \sqrt{a^2 \pm d^2}$.

3.° $x = \frac{ah \pm c \sqrt{p^2 \pm q^2}}{h}$; pongasi $\sqrt{p^2 \pm q^2} = d$
 si deduce:

$$x = \frac{ab}{h} \pm \frac{cd}{h}$$

4.° $x = \sqrt{\frac{a^3 \pm b^3}{c \pm d}}$. Intanto $a^3 \pm b^3 = a^2 \left(a \pm \frac{b^3}{a^2} \right)$.

Si faccia $\frac{b^3}{a^2} = h$; $a \pm h = l$; $c \pm d = f$; sostituendo:

$$\frac{a^3 \pm b^3}{c \pm d} = \frac{a^2 l}{f}; \text{ pongasi ancora } \frac{al}{f} = m, \text{ e si ha infine}$$

$$x = \sqrt{am}.$$

5.° $x = \sqrt[4]{abcd}$; si trovi $\sqrt{ab} = f$, $\sqrt{cd} = h$
 e si ha

$$x = \sqrt{\sqrt{ab}, \sqrt{cd}} = \sqrt{fh}.$$

6.° $x = \sqrt[4]{a^4 \pm b^4}$.

Si osservi che

$$a^4 \pm b^4 = a^2 \left(a^2 \pm \frac{b^4}{a^2} \right);$$

se si pone $\frac{b^4}{a^2} = c$ e poi $a^2 \pm c = d^2$, si ha $a^4 \pm b^4 = a^2 d^2$

ed infine $x = \sqrt[4]{a^4 \pm b^4} = \sqrt{ad}$
 e così via.

313. Faremo da ultimo osservare che coi due problemi n. 227 e 228, si risolve graficamente la equazione di 2.° grado rispettivamente sotto le due forme:

$$x^2 - px + a^2 = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + dx - a^2 = 0$$

1.° Infatti dalla fig. 127, si ha

$$AE = OA - OE \quad \text{e} \quad BE = OB + OE$$

ma $OA = OB = \frac{p}{2}$ e $OE = \sqrt{OD^2 - DE^2}$

ora $OD = OA = \frac{p}{2}$, $DE = CO = a$.

sostituendo:

$$OE = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - a^2}$$

e finalmente

$$AE = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - a^2}$$

e $BE = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - a^2}$

2.° Nella fig. 128, si ha

$$CE = CO - OE, \quad CD = CO + OD$$

ma $CO = \sqrt{OA^2 + AC^2}$,

ossia $CO = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + a^2}$, $OE = \frac{d}{2}$

sostituendo

$$CE = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{d}{2},$$

$$CD = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + a^2} + \frac{d}{2}$$

che rappresentano appunto i valori assoluti delle due radici.

CAPITOLO VI

LE FIGURE SIMILI

MISURA DEL CERCHIO E DELLA CIRCONFERENZA

§ 1.º Segmenti proporzionali.

Più rette concorrenti in un punto o parallele fra loro si dicono formare un *fascio*: il punto di concorso (quando esiste) è il *centro* del fascio,

314. TEOREMA (di Talete ⁽¹⁾). *Un fascio di parallele determina su due trasversali due classi di segmenti proporzionali.*

Il fascio di parallele AA' , BB' , CC' , DD' ,..... (fig. 149 α) determini sulle due trasversali AD , $A'D'$ le due classi di segmenti

AB , BC , CD , $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$
in corrispondenza univoca: dico che le due classi sono proporzionali. Infatti se è per es. $AB = CD$, anche $A'B' = C'D'$ (problema 155), di più ad

⁽¹⁾ Talete, oriundo della Fenicia, visse dal 639 al 543 a. C. Visitò l'Egitto per istruirsi; di poi si stabilì a Mileto, dove fondò la *Scuola ionica*. A lui si attribuiscono parecchie scoperte in Geometria, tra le quali, oltre il teorema accennato, l'uso dell'arco per la misura dell'angolo ed il teorema sull'angolo inscritto. La sua scuola diede origine alle diverse sette filosofiche greche e segnò i primi progressi della geometria, la quale poi avanzò grandemente colla scuola di Platone (430-347 a. C.).

$AC = AB + BC$ corrisponde $A'C' = A'B' + B'C'$: dunque le due classi (n. 283 e 284) sono proporzionali, e cioè presi due segmenti AB, CD della prima e i due corrispondenti $A'B', C'D'$ della seconda si ha
 $AB : CD = A'B' : C'D'$.

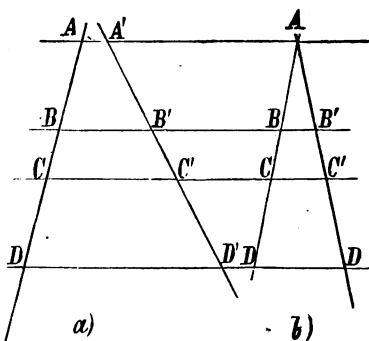


Fig. 149.

OSSERVAZIONE 1.^a Se le trasversali sono parallele, i segmenti corrispondenti sono eguali.

OSSERVAZIONE 2.^a I due punti A ed A' possono coincidere (fig. 149 b), il che equivale a dire che il punto d'incontro delle trasversali fa le veci di una parallela, da cui come caso particolare si ha:

TEOREMA. *Se in un triangolo si conduce la parallela ad un lato, questa determina sugli altri due lati segmenti proporzionali.*

2. Reciprocamente:

TEOREMA. *Se sopra due rette si hanno due classi di segmenti adiacenti e proporzionali e due delle congiungenti i punti corrispondenti sono parallele, ogni altra congiungente le coppie di punti corrispondenti è parallela alle prime.*

Se le due classi di segmenti $AB, BC, CD, \dots$ e $A'B', B'C', C'D', \dots$ (fig. 149 a) sono proporzionali e se AA' e BB' sono parallele, ogni altra retta, come $CC', DD', \dots$ è parallela alle prime. Infatti se CC' per es. non è parallela ad AA' , lo sia la CC'' : si avrà allora

$$AB : BC = A'B' : B'C$$

ma per ipotesi

$$AB : BC = A'B' : B'C'$$

da cui

$$A'B' : B'C'' = A'B' : B'C'$$

ed anche $B'C'' = B'C'$: il che è assurdo, a meno che C'' non coincida con C' .

OSSERVAZIONE. Il teorema precedente può anche enunciarsi così:

TEOREMA. *Se sopra due rette concorrenti a partire dal loro punto d'incontro si hanno due classi di segmenti adiacenti e proporzionali, le rette che uniscono le coppie di punti corrispondenti sono parallele.*

Ad es. nella fig. 149 b) se

$$AB : BC : CD... = A'B' : B'C' : C'D' : ...$$

le BB' , CC' , $DD'...$ sono parallele.

COROLLARIO. *Se due lati d'un triangolo sono divisi da una retta in parti proporzionali, questa è parallela al terzo lato.*

315. Una successione di punti sopra una retta si dice una *punteggiata*.

316. Due punteggiate si dicono *simili*, se i punti dell'una corrispondono univocamente ai punti dell'altra in modo che i segmenti terminati a punti corrispondenti sono proporzionali.

Ad es. le punteggiate $ABCD, ... A'B'C'D', ...$ del teorema di Talete sono simili.

317. TEOREMA 1.° *Un fascio di rette determina su due seganti parallele due punteggiate simili.*

Sia il fascio di centro O (fig. 150), i raggi del

quale incontrano due parallele rispettivamente nei punti A, B, C, D,...; A', B', C', D',... Intanto è chiaro (n. 314, Oss. 2^a) che

$$OA : OA' = OB : OB' = OC : OC' = \dots$$

Si conduca ora da A la parallela alla OB ad incontrare in M la A'B'. Nel triangolo OA'B' la AM parallela al lato OB' determina sugli altri due lati segmenti proporzionali, perciò:

$$OA : OA' = MB' : A'B'$$

ma $MB' = AB$ (n. 118; e sostituendo

$$OA : OA' = AB : A'B'$$

similmente si dimostra

$$OB : OB' = BC : B'C'$$

Ma i primi rapporti delle due proporzioni sono eguali, perciò

$$AB : A'B' = BC : B'C'$$

analogamente

$$BC : B'C' = CD : C'D' \text{ ecc....}$$

dunque le due punteggiate A,B,C,D,...; A',B',C',D',... sono simili.

OSSERVAZIONE. Se il fascio è formato di rette parallele, i segmenti corrispondenti sono eguali.

COROLLARIO. *In un triangolo una parallela ad un lato forma cogli altri due (prolungati se occorre) un altro triangolo. Gli angoli dei due triangoli sono rispettivamente eguali, ed i lati adiacenti ad angoli eguali sono proporzionali.*

Infatti nel triangolo OA'B' la AB parallela ad A'B' forma il triangolo OAB con gli angoli eguali a quelli del primo. Di più, per quanto si è visto,

$$OA : OA' = OB : OB' = AB : A'B'$$

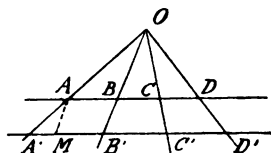


Fig. 150.

Reciprocamente

2.° TEOREMA. *Se si hanno due punteggiate simili su due rette parallele, le congiungenti i punti corrispondenti concorrono in un punto (o sono parallele).*

Se $A, B, C, \dots A', B', C', \dots$ (fig. 151) sono punteggiate simili, si uniscano tre coppie di punti corrispondenti A, A' ; B, B' ; C, C' : la AA' incontri la BB' in O ; e la CC' incontri la BB' in P . Si avrà

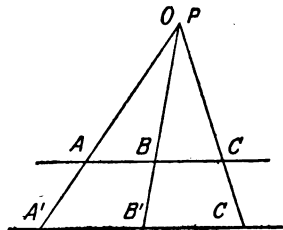


Fig. 151.

$AB : A'B' = OB : OB'$ e $BC : B'C' = PB : PB'$ ma i primi rapporti delle due proporzioni sono eguali per ipotesi, perciò

$$OB : OB' = PB : PB'$$

da cui (n. 282, 4.°)

$$OB : BB' = PB : BB'$$

il che è assurdo se O non coincide con P .

Le $AA', BB', CC', \dots$ sono parallele, se i segmenti $AB, BC, \dots$ sono eguali rispettivamente ai segmenti $A'B', B'C', \dots$

§ 2.° Triangoli simili.

318. Due triangoli che hanno gli angoli rispettivamente eguali e i lati adiacenti agli angoli eguali rispettivamente proporzionali, si dicono *simili*.

Ad es. i triangoli considerati nel Coroll.° del n. 317 sono simili.

TEOREMA. *Due triangoli che hanno due coppie di angoli rispettivamente eguali sono simili.*

I due triangoli ABC , $A'B'C'$, (fig. 152) abbiano $\widehat{A} = \widehat{A'}$ e $\widehat{B} = \widehat{B'}$. Sul lato AB si prenda $AB'' = A'B'$ e si conduca $B''C''$ parallela a BC : i due triangoli $A'B'C'$, $AB''C''$ sono eguali per avere $A'B' = AB''$, $\widehat{A} = \widehat{A'}$ e $\widehat{AB''C''} = \widehat{A'B'C'}$, perchè entrambi eguali ad $\widehat{ABC}$. Ma il triangolo $AB''C''$ è simile ad ABC (n. 317. Cor.^o); dunque anche $A'B'C'$ è simile ad ABC .

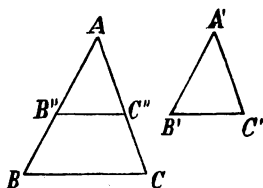


Fig. 152.

COROLLARIO. *Due triangoli coi lati rispettivamente paralleli sono simili.*

Infatti nè le tre coppie di angoli coi lati paralleli, nè due di esse possono essere di angoli supplementari, perchè in tal caso la somma dei sei angoli supererebbe $4R$: dunque due delle coppie devono essere di angoli eguali.

320. TEOREMA. *Due triangoli che hanno una coppia di angoli eguali compresi fra due coppie di lati proporzionali, sono simili.*

Nei due triangoli ABC , $A'B'C'$ (fig. 152) sia $\widehat{A} = \widehat{A'}$ e $AB : A'B' = AC : A'C'$.

Ripetuta la costruzione del caso precedente si avrà

$$AB : AB'' = AC : AC''.$$

Ma dalle due proporzioni per essere $A'B' = AB''$ si deduce $A'C' = AC''$: perciò i due triangoli $A'B'C'$, $AB''C''$ sono eguali per avere due lati e l'angolo compreso eguali. Dunque, come nel caso precedente, $A'B'C'$ è simile ad ABC .

321. TEOREMA. *Due triangoli, che hanno i lati ordinatamente proporzionali, sono simili.*

Nei triangoli ABC, A'B'C' (fig. 152) si abbia

$$AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'.$$

Ripetuta la stessa costruzione si avrà

$$AB : AB'' = AC : AC'' = BC : B''C''$$

Ma per essere $A'B' = AB''$, dal confronto delle due serie di rapporti eguali si deduce $AC'' = A'C'$ e $B''C'' = B'C'$: e perciò i due triangoli A'B'C', AB''C'' sono eguali per avere i lati rispettivamente eguali. Dunque, come nei casi precedenti, i triangoli ABC, A'B'C' sono simili.

Dal teorema n. 319 risulta evidente la possibilità di risolvere il seguente

322. PROBLEMA. *Dato un triangolo ed un segmento, come omologo di un lato, costruire su di esso un triangolo simile al dato.*

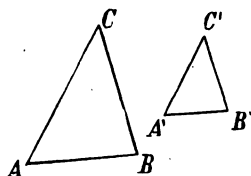


Fig. 153.

Sia ABC (fig. 153) il triangolo dato ed A'B' il segmento omologo di AB. Si costruisca su A'B' il triangolo A'B'C' cogli angoli $\widehat{A'}$ e $\widehat{B'}$ eguali rispettivamente agli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$; il triangolo A'B'C' è simile al triangolo ABC.

323. APPLICAZIONI. Approfittando di quanto si è detto sui segmenti proporzionali e sui triangoli simili, si possono dimostrare i seguenti teoremi:

1.° TEOREMA (di Euclide ⁽¹⁾). *Un triangolo ret-*

(¹) Euclide, sommo geometra greco (di Megara), morto verso il 285 a C., allievo della scuola di Platone. Raccolse ed ordinò mirabilmente le scoperte geometriche fatte prima di lui e da lui stesso in 13 libri col titolo *Elementi di Geometria*, che ancora oggi, dopo circa 22 secoli, costituiscono si può dire il codice dell'insegnamento della geometria nelle scuole secondarie. A questi vanno aggiunti altri due libri.

tangolo vien diviso dall'altezza relativa all'ipotenusa in due triangoli simili all'intero triangolo e simili tra loro.

Da cui risulta che:

a) *Un cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa e la sua proiezione su di essa;*

b) *L'altezza è media proporzionale fra le proiezioni dei cateti sulla ipotenusa. (Vedasi n. 293, 1.º).*

2.º TEOREMA. *Se da un punto M interno od esterno ad una circonferenza si conducono delle secanti, i segmenti di una secante (presi a partire da M) sono antiproporzionali a quelli di un'altra.*

Da cui il teor. n. 293, 2.º.

3.º TEOREMA. *La bisettrice di un angolo interno od esterno di un triangolo incontra il lato opposto in un punto tale che le sue distanze dagli estremi del lato sono proporzionali agli altri due lati.*

Vedansi i numeri 286 e 288.

324. Tenendo poi presente insieme a questi il teorema che: *se quattro segmenti sono in proporzione il rettangolo dei medi equivale a quello degli estremi*, si deducono i teoremi n. 203, 204, 214, 219, 220, 221, 222, 223 sull'equivalenza già ottenuti per altra via; il che lo studioso può fare senza difficoltà.

che trattano dei cinque poliedri regolari, da alcuni attribuiti ad Ipsicle, geometra della scuola di Alessandria posteriore di circa 150 anni. Oltre gli Elementi si conoscono i *Dati*, che possono considerarsi come una continuazione degli Elementi.

Del medesimo autore si sono perduti invece quattro libri sulle *Sezioni coniche*, due sui *Luoghi alle superficie* ed infine i più importanti, cioè tre sui *Porismi*, di cui la divinazione fu compita felicemente dallo Chasles. Vedasi *Aperçu historique* ecc.

§ 3. Poligoni simili.

325. Dato un poligono $ABCDEF$ (fig. 154) si conducano da un vertice A le diagonali; queste decompongono il poligono in quattro triangoli ABC , ACD , ADE , AEF .

Di poi sopra un segmento $A'B'$, come omologo di AB , si costruisca il triangolo $A'B'C'$ simile ad ABC ; sopra $A'C'$, come omologo di AC , il triangolo $A'C'D'$ simile e similmente posto ad ACD , e così di seguito i triangoli $A'D'E'$, $A'E'F'$ simili e similmente posti ai triangoli ADE , AEF . I triangoli $A'B'C'$,...

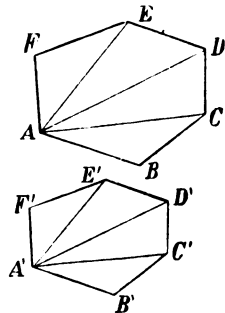


Fig. 154.

$A'E'F'$ formano un nuovo poligono $A'B'C'D'E'F'$, che ha gli angoli eguali e i lati proporzionali rispettivamente agli angoli ed ai lati del poligono dato. Infatti gli angoli dei due poligoni sono eguali, alcuni per costruzione, come ad es. gli angoli $\widehat{B}$ e $\widehat{B'}$, altri come somme di angoli eguali, come ad es. le coppie $\widehat{FAB}$, $\widehat{F'A'B'}$; $\widehat{BCD}$, $\widehat{B'C'D'}$, ecc. Di più dalla prima coppia di triangoli simili ABC , $A'B'C'$ si ha

$$AB : A'B' = BC : B'C' = AC : A'C'$$

dalla seconda coppia ACD , $A'C'D'$ si ha

$$AC : A'C' = CD : C'D' = \dots$$

da cui

$$AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = \dots$$

così di seguito, considerando le successive coppie di triangoli simili, si deduce che i lati dei due poligoni sono ordinatamente proporzionali.

326. Due poligoni, che hanno gli angoli ordinatamente eguali e i lati adiacenti a questi proporzionali, si dicono *simili*. Sono *omologhi* i vertici degli angoli eguali ed i segmenti che uniscono punti omologhi.

COROLLARIO. *Due poligoni regolari dello stesso numero di lati sono simili.*

327. Quanto è detto più sopra dimostra il

TEOREMA. *Due poligoni formati di triangoli simili e similmente posti sono simili.*

328. E mostra ancora la possibilità di risolvere il

PROBLEMA. *Dato un poligono ed un segmento, come omologo di un lato, costruire su questo un poligono simile al dato.*

329. Reciprocamente:

TEOREMA. *Due poligoni simili sono scomponibili nello stesso numero di triangoli simili e similmente posti.*

Siano i due poligoni $ABCDEF$, $(ABCDEF)'$ ⁽¹⁾ (fig. 155) simili. Analogamente a quanto si è fatto più sopra, si potrebbero condurre le diagonali da due vertici omologhi.

Ma per maggiore generalità si prenda nell'interno del primo poligono un punto O e lo si congiunga coi vertici; indi sopra $A'B'$, omologo di

AB , si costruisca il triangolo $A'B'O'$ simile e similmente posto ad ABO : congiunto il punto O' coi rimanenti vertici del poligono $(ABCDEF)'$, dico

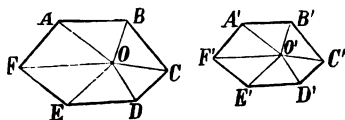


Fig. 155.

(1) Scriveremo talvolta per brevità $(ABCDEF)'$ invece di $A'B'C'D'E'F'$.

che questo è diviso in altrettanti triangoli simili e similmente posti a quelli del poligono ABCDEF. Infatti si consideri la coppia di triangoli BCO, B'C'O' adiacenti ai triangoli ABO, A'B'O'. Gli angoli $\widehat{OBC}$, $\widehat{O'B'C'}$ sono eguali, perchè differenze di angoli eguali; di più dai triangoli simili ABO, A'B'O' si ha

$$AB : A'B' = BO : B'O'$$

e per ipotesi

$$AB : A'B' = BC : B'C'$$

da cui

$$BO : B'O' = BC : B'C'$$

perciò i triangoli BCO, B'C'O', avendo una coppia di angoli eguali compresi fra lati proporzionali, sono simili. Così procedendo si deduce la somiglianza delle successive coppie di triangoli.

330. TEOREMA. *I perimetri di due poligoni simili stanno come due lati omologhi.*

Infatti, se si indicano con $a, b, c, d, \dots$ i lati di un poligono e con $a', b', c', d', \dots$ gli omologhi dell'altro, dall'essere per ipotesi

$$a : a' = b : b' = c : c' = \dots$$

si deduce (n. 259, 4.^o b)

$$(a + b + c + \dots) : (a' + b' + c' + \dots) = a : a'.$$

331. TEOREMA. *Due poligoni simili ad un terzo sono simili tra loro.*

Siano per brevità P, P', P'' tre poligoni dati; $a, b, c, \dots; a', b', c', \dots; a'', b'', c'', \dots$ i loro lati omologhi, e siano P' e P'' simili a P ; dico che P' e P'' sono simili tra loro.

Infatti gli angoli di ciascuno dei due poligoni essendo eguali rispettivamente a quelli del poligono P sono eguali tra loro ciascuno a ciascuno. Di più per ipotesi si ha

$$a : a' = b : b' = c : c' = \dots$$

ed anche

$$a : a'' = b : b'' = c : c'' = \dots$$

da cui si deduce (n. 281, 3.º b)

$$a' : a'' = b' : b'' = c' : c'' = \dots$$

cioè i lati dei poligoni P' e P'' sono proporzionali; dunque P' e P'' sono simili.

331. TEOREMA. *Se due poligoni hanno i lati ordinatamente proporzionali e gli angoli compresi eguali ad eccezione:*

1.º *di due lati e dell'angolo compreso,*

2.º *di un lato e degli angoli adiacenti,*

3.º *di tre angoli consecutivi,*

su i quali non si fa alcuna ipotesi, i due poligoni sono simili.

Siano $ABCDE$, $(ABCDE)'$ (fig. 156) due poligoni

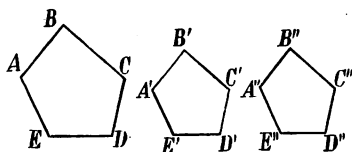


Fig. 156.

aventi i lati ordinatamente proporzionali e gli angoli compresi eguali, ad eccezione p. es. degli angoli $\widehat{E}$ ed $\widehat{E'}$ e delle due coppie di lati che li comprendono. Sopra un segmento $A''B'' = A'B'$, come omologo di AB , si costruisca il poligono $(ABCDE)''$ simile ad $ABCDE$ (n. 328). Con un ragionamento analogo a quello del precedente teorema si deduce che i poligoni $[ABCDE]'$ e $(ABCDE)''$ avranno i lati proporzionali e gli angoli eguali, ad eccezione degli angoli $\widehat{E'}$ ed $\widehat{E''}$ e dei lati che li comprendono, ossia:

$$A'B' : A''B'' = B'C' : B''C'' = C'D' : C''D''$$

ma $A'B' = A''B''$, perciò (n. 282, 1.º Teorema) anche $B'C' = B''C''$ e $C'D' = C''D''$; ed allora i due poli-

goni, avendo i lati e gli angoli ordinatamente eguali, ad eccezione degli angoli $\widehat{E'}$ ed $\widehat{E''}$ e dei lati che li comprendono, sono eguali (n. 108, Teor.). Ma il poligono $ABCDE$ è simile ad $(ABCDE)''$, dunque è simile anche ad $(ABCDE)$.

Lo stesso dicasi negli altri due casi.

§ 4. Figure simili direttamente ed inversamente.

333. Nei paragrafi precedenti sono state date alcune proprietà dei triangoli e dei poligoni simili; e le condizioni di somiglianza. Facciamo ora una distinzione intorno alle figure simili analoga a quella fatta per le figure eguali (Cap. II, § 5).

Sieno ABC , $A'B'C'$ (fig. 157) due triangoli simili; A e A' , B e B' , C e C' i vertici omologhi. Si ribalti

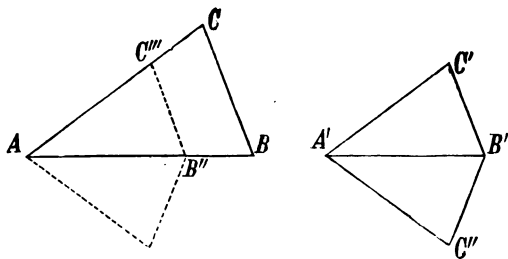


Fig. 157.

sul piano il triangolo $A'B'C'$ facendolo rotare intorno ad $A'B'$; e sia $A'B'C''$ la sua nuova posizione. Si faccia scorrere nel piano la figura $A'C'B'C''$ fino a che A' cada in A e B' sopra AB in un punto B'' : è chiaro che uno dei due triangoli, per es. $A'B'C'$, cadrà dalla stessa banda del triangolo ABC e precisamente il punto C' cadrà sopra AC in un punto

C'' in modo che B''C'' risulti parallela a BC (n. 314, 2.° Cor.). Perchè l'altro triangolo A'B'C'' possa sovrapporsi al triangolo ABC, occorre rovesciarlo facendolo rotare intorno ad A'B' (coincidente con AB'').

334. Per distinguere i due casi noi diremo che i triangoli ABC A'B'C' sono *simili direttamente*, mentre i triangoli ABC, A'B'C'' sono *simili inversamente*.

La stessa distinzione per i poligoni. Secondochè i triangoli in cui si possono decomporre due poligoni simili (n. 329) sono direttamente o inversamente simili, anche i due poligoni sono direttamente o inversamente simili.

Anche per i poligoni simili vale la stessa osservazione fatta per i poligoni eguali; e cioè che due osservatori, che percorrono i contorni di due poligoni simili direttamente in modo da passare da vertici omologhi a vertici omologhi, lasciano i due poligoni dalla medesima banda (cioè o entrambi a destra o entrambi a sinistra); se sono inversamente simili, da bande opposte; il che può servire a riconoscere se due poligoni sono simili direttamente od inversamente senza spostare uno di essi.

Vi sono figure che se sono simili, lo sono tanto direttamente quanto inversamente; ad es. due triangoli isosceli, due rettangoli, due poligoni regolari ecc.

335. Passando ora al concetto generale di figure simili, si dirà che: *due figure sono simili (direttamente o inversamente) se a ciascun punto dell'una corrisponde uno ed un sol punto dell'altra in modo che tre punti dell'una e i tre corrispondenti dell'altra siano vertici di triangoli simili (direttamente o in-*

versamente). E se tre punti dell' una sono allineati, i tre corrispondenti dell' altra sono allineati, ed i segmenti che hanno per estremi punti corrispondenti sono proporzionali.

Questa definizione è giustificata dal seguente:

TEOREMA. *Dati due segmenti AB , $A'B'$ (fig. 158) se ai punti $C, D, E...$ del piano, che si considerino come facenti parte di una figura insieme con AB , si fanno corrispondere rispettivamente i punti $C', D', E'...$ che si considerino come facenti parte di un' altra figura insieme con $A'B'$ e tali che le coppie di triangoli $ABC, A'B'C'$; $ABD, A'B'D'$; $ABE, A'B'E'$,... siano direttamente (o inversamente) simili, anche due triangoli, che hanno per vertici tre coppie qualunque di punti corrispondenti sono simili direttamente (o inversamente).*

E le due figure sono simili direttamente (o inversamente).

Infatti se si sovrappone la seconda figura alla prima in modo che A' cada in A e B' sopra AB in

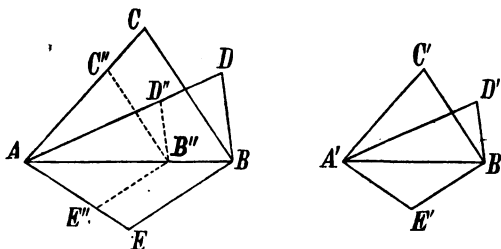


Fig. 158.

un punto B'' , è chiaro che per essere direttamente simili i triangoli $ACB, A'C'B'$, il punto C' , cadrà sopra AC in C'' e in modo che $C''B''$ sia parallelo a CB e nella stessa direzione (n. 314, 2.º Cor.)

analogamente dicasi dei punti D' , E': di più si avrà che

$$AB : AB'' = AC : AC'' = AD : AD'' = AE : AE''....$$

e perciò anche i segmenti che uniscono i punti C'' , D'' , E'' ... saranno paralleli e nella stessa direzione ai segmenti che uniscono i punti corrispondenti C , D , E Ne consegue che le coppie di triangoli come CDE , $C''D''E''$, che hanno per vertici tre coppie qualunque di punti corrispondenti, sono direttamente simili (n. 319, Cor.).

E se i triangoli dati sono inversamente simili, ribaltando la seconda figura sul piano si ricade nel caso considerato. I punti A' , B' , C' ,... si dicono *omologhi* ai punti A , B , C ,....

È chiaro poi che se tre punti della seconda figura sono sopra una retta, anche i tre corrispondenti della prima sono sopra una retta che risulterà parallela alla prima.

336. Fra le principali conseguenze che si possono dedurre noteremo le seguenti:

1.^o *I segmenti omologhi hanno un rapporto costante che dicesi il rapporto di similitudine delle due figure.*

Nel caso particolare di due triangoli simili sono segmenti omologhi le altezze, le mediane, le bisettrici che partono da vertici omologhi; i raggi dei cerchi circoscritti, dei cerchi inscritti e degli ex-inscritti tangenti a lati omologhi.

2.^o *Se una figura ha un centro, anche l'altra ha un centro che è omologo al primo.*

3.^o *Due archi, due settori che corrispondono ad angoli al centro eguali, due circonferenze, due cerchi sono simili tanto direttamente quanto inver-*

samente: lo stesso dicasi di segmenti circolari contenuti da archi simili.

3.° Due figure F_1 , F_2 simili ad una terza F_3 sono simili tra loro; e precisamente se F_1 , F_2 sono entrambe simili direttamente od inversamente ad F_3 sono simili direttamente tra loro; se invece una delle prime due è simile direttamente ad F_3 e l'altra inversamente, le prime due sono simili inversamente tra loro.

337. Faremo da ultimo osservare che:

Data una figura ABCDE.... (fig. 158) il problema di costruire una figura simile (direttamente od inversamente) alla data sopra un segmento A'B', come omologo ad un segmento AB della figura stessa, è ridotto a costruire una serie di triangoli A'B'C', A'B'D'... simili (direttamente od inversamente) e similmente posti ai triangoli ABC, ABD,... della figura data.

§ 5°. Gruppi armonici.

338. Ai n. 287 e 288 si è dimostrato che, dato un triangolo ABC (fig. 159), se si conducono le bisettrici degli angoli in C interno ed esterno, ad incontrare il lato opposto rispettivamente in D ed in E, si hanno le proporzioni:

$AD : DB = AC : CB$ e $AE : EB = AC : CB$
dalle quali si deduce

$$AD : DB = AE : EB$$

Quando quattro punti di una retta sono legati da una siffatta relazione, si dice che i quattro punti formano un *gruppo* o *sistema armonico* ⁽¹⁾; che il punto A è *coniugato*

(1) La denominazione di *armonico* è presa a prestito, per mo' di dire, dall'acustica: perchè tre corde sonore che abbiano lunghezze proporzionali ai tre segmenti AE, AB, AD (identiche nel resto) danno rispettivamente le tre note *do*, *mi*, *sol*, le quali costituiscono l'accordo perfetto maggiore.

con B, e D con E. Si dice ancora che i punti D, E dividono armonicamente (il primo internamente, il secondo esternamente) il segmento AB.

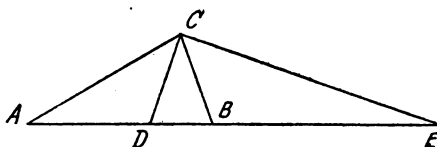


Fig. 159.

Reciprocamente il segmento DE è diviso armonicamente dai punti A, B; poichè dalla proporzione precedente si deduce (n. 282)

$$AD : AE = BD : BE$$

Nell'enunciare un gruppo armonico si usa enunciare prima due punti coniugati e poi gli altri due: così il gruppo precedente si dice ABDE, o DEAB.

339. Dati tre punti A, B, C d'un gruppo armonico, il quarto resta individuato. Infatti essendo A coniugato con B, sieno se possibile, due punti D, D' coniugati con C. Si avrà

$$AC : BC = AD : BD \quad \text{e} \quad AC : BC = AD' : BD',$$

da cui

$$AD : BD = AD' : BD'$$

D'altra parte D e D' devono essere dalla stessa banda rispetto ad A ed a B; perciò dall' ultima proporzione si deduce

$$AB : BD = AB : BD',$$

il che è impossibile se D' non coincide con D.

340. Se si unisce un punto qualunque M coi quattro punti A, B, C, D d'un gruppo armonico (fig. 160) i quattro raggi ⁽¹⁾ MA, MB, MC, MD si dice che formano un *gruppo armonico di raggi*, che si rappresenta con M (ABCD). Il raggio MA è coniugato con MB, ed MC con MD. Questa denominazione è dovuta al fatto che:

Una trasversale incontra i quattro raggi concorrenti in M in quattro punti che formano un gruppo armonico.

Il che si esprime anche dicendo che la proprietà d'un gruppo armonico è *proiettiva*.

Per dimostrarlo distingueremo alcuni casi:

(¹) Colla parola raggio s'intende qui di indicare un raggio ed il suo opposto, ossia tutta una retta.

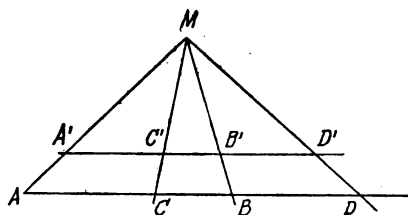


Fig. 160.

1.^o La trasversale è parallela alla retta del gruppo ABCD.

Siano A', B', C', D' i punti d'incontro della nuova trasversale coi quattro raggi (fig. 160). In questo caso i punti A, B, C,

D e i punti corrispondenti A', B', C', D' fanno parte di due punteggiate simili (n. 316), perciò i segmenti corrispondenti sono proporzionali. E poichè per ipotesi

$$AC : BC = AD : BD$$

anche

$$A'C' : B'C' = A'D' : B'D'$$

2.^o La nuova trasversale passa per A.

Siano B', C', D' i punti d'incontro della medesima coi raggi MB, MC, MD (fig. 161).

Conducasi da B' la parallela ad AD, che incontri MC in L ed MD in H. Dai triangoli simili C'CA, C'LB' si ha:

$$C'A : C'B' = CA : B'L$$

e dai triangoli simili D'DA, D'HB'

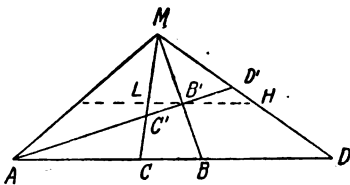


Fig. 161.

$$D'A : D'B' = DA : B'H$$

Ora

$$CA : B'L = (CA : CB) \times (CB : B'L)$$

$$DA : B'H = (DA : DB) \times (DB : B'H)$$

ma per ipotesi

$$CA : CB = DA : DB$$

e per essere CD parallela ad LH

$$CB : B'L = DB : B'H$$

perciò i due prodotti di rapporti sono eguali, da cui anche

$$CA : B'L = DA : B'H$$

cioè le prime due proporzioni hanno i secondi rapporti eguali; dunque

$$C'A : C'B' = D'A : D'B'$$

3.^o La trasversale è qualunque.

Sieno A', B', C', D' i punti d'incontro della nuova trasversale coi quattro raggi (fig. 162): si conduca la A'D, che incontri in E, F rispettivamente i raggi MB, MC. Il gruppo

ABCD essendo armonico, anche il gruppo A'EFD è armonico pel caso precedente; e per la stessa ragione lo è anche il gruppo A'B'C'D'.

OSSERVAZIONE. Se dai quattro punti d' un gruppo armonico ABCD (fig. 163) si conducono quattro parallele, queste formano pure un gruppo armonico di raggi. Infatti condotta una trasversale qualunque A'B'C'D', i due gruppi A, B, C, D e A', B', C', D' fanno parte di due punteggiate simili pel teor. di Talete; perciò essendo armonico il gruppo ABCD, lo è anche il corrispondente A'B'C'D'.

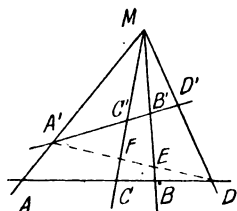


Fig. 162.

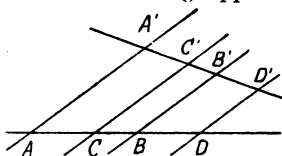


Fig. 163.

COROLLARIO. *In un triangolo due lati e le bisettrici dei loro angoli formano un gruppo armonico di raggi.*

341. TEOREMA. *Se una trasversale di un gruppo armonico di raggi è parallela ad uno di essi, i due segmenti della trasversale determinati dagli altri tre raggi sono eguali.*

Sia M(ABCD) il gruppo armonico (fig. 164) ed una trasversale parallela a MD incontri gli altri tre raggi nei punti E, C, F: dico $EC = CF$. Infatti conducasi per C una trasversale che incontri ME in A, MF in B, ed MD in D. Dai triangoli simili ACE, ADM si ha:

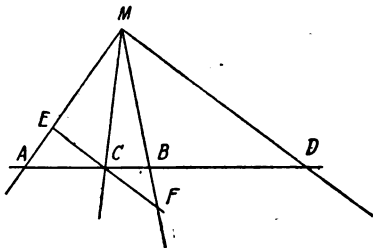


Fig. 164.

$CE : MD = AC : AD$

e dai triangoli simili BCF, BMD:

$$CF : MD = BC : BD$$

e siccome il gruppo ABCD è armonico

$$AC : AD = BC : BD$$

perciò dalle due proporzioni precedenti si deduce

$$CE : MD = CF : MD$$

da cui

$$CE = CF$$

È vero anche il reciproco. Lasciamo allo studioso di enunciarlo e dimostrarlo per assurdo.

COROLLARIO. *Due lati di un triangolo, la mediana concorrente con essi e la parallela al terzo lato condotta pel vertice opposto formano un gruppo armonico di raggi.*

342. TEOREMA. *Il luogo dei punti, che hanno da due punti dati A, B distanze proporzionali a due segmenti diseguali m, n, è la circonferenza che ha per diametro il segmento DE (fig. 165), dove i punti D, E dividono armonicamente il segmento AB nel rapporto dato m : n.*

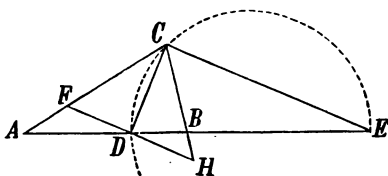


Fig. 165.

Sia infatti

$$DA : DB = EA : EB = m : n$$

Se per un punto C esterno alla AB si ha

$$CA : CB = m : n$$

cioè

$$CA : CB = DA : DB = EA : EB$$

le CD e CE sono le bisettrici dei due angoli in C interno ed esterno al triangolo ABC, che sono supplementari; perciò $\widehat{DCE}$ è retto, e la circonferenza di diametro DE passa per C.

Reciprocamente se C è sulla circonferenza di diametro DE, si unisca C con A, B, D, E e da D si conduca la parallela a CE ad incontrare in F ed H le AC e CB.

Il fascio C(ABDE) è armonico e la trasversale FH è parallela al raggio CE, perciò (n. 341).

$$DF = DH$$

D'altra parte essendo $\widehat{DCE}$ retto, perchè inscritto in una semicirconferenza, anche $\widehat{CDH}$ e $\widehat{CDF}$ sono retti. Allora i due triangoli CDF, CDH sono eguali, e la CD è bisettrice dell'angolo ACB: perciò (n. 287, 1.º)

$$CA : CB = DA : DB = m : n$$

OSSERVAZIONE 1.ª Questo luogo è noto col nome di *circonferenza d' Apollonio* ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Questo celebre geometra, nato verso il 245 a. C., segnò con Archimede, suo contemporaneo, l'apogeo della

OSSERVAZIONE 2.^a Quando $m = n$, il punto E manca, D è il punto medio di AB ed il luogo è la retta perpendicolare ad AB nel punto medio (n. 130).

§ 6.^o Problemi.

343. 1.^o PROBLEMA. *Dividere un segmento dato in parti proporzionali a segmenti dati m, n, p .*

Sia AB (fig. 166) il segmento dato; si conduca da A una retta qualunque e sopra di essa si prendano successivamente i segmenti $AM = m$, $MN = n$, $NP = p$. Si congiunga P con B, e da M ed N si conducano le parallele a PB ad incontrare in C e D il segmento AB. Questo è diviso in C e D in parti proporzionali ai segmenti m, n, p ; cioè si ha

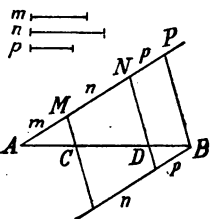


Fig. 166.

$$AC : CD : DB = m : n : p.$$

OSSERVAZIONE. La costruzione riesce più spedita conducendo da A e da B due parallele in direzione contraria; portando sulla prima successivamente tre segmenti eguali ad m, n, p come precedentemente, geometria presso gli antichi. Egli lasciò parecchie opere, che ci sono pervenute quasi tutte incomplete, e solo in questi ultimi due secoli vennero in gran parte reintegrate colla scorta di citazioni di geometri posteriori, specie di Pappo (IV secolo E. V.) e di Tolomeo (vedi nota pag. 145); quali ad es. i trattati *De locis planis* (dove trovasi il teorema sopra citato), *De sectione rationis*, *De sectione spatii*, *De sectione determinata*, ecc.

Ma la sua più grande opera, che gli valse il titolo di *geometra per eccellenza* è il trattato *Sulle Coniche* in 8 libri, monumento ammirabile di un tanto genio, che seppe scoprire le più belle proprietà di queste curve, anche senza l'aiuto dell'analisi moderna.

e sulla seconda a partire da B due segmenti eguali a p ed n . Tracciando le rette che uniscono gli estremi dei segmenti eguali, queste dividono AB nel modo cercato, perchè sono parallele tra loro (n. 119).

2.^o PROBLEMA. Merita speciale considerazione il caso che sia *da dividere un segmento AB in parti proporzionali a due segmenti dati m , n .*

Si ripeta la costruzione: cioè sopra una retta condotta da A (fig. 167) si portino i segmenti $AM = m$, $MN = n$; si unisca N con B e da M si conduca la MC parallela ad NB. Si avrà

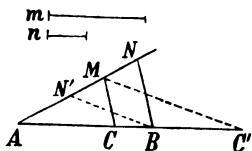


Fig. 167.

$$AC : CB = m : n$$

Se il segmento eguale ad n si porta non di seguito ad AM, ma in senso opposto, cioè si prende $MN' = n$ e congiunto N' con B, si conduce da M la parallela ad $N'B$ ad incontrare in C il prolungamento di AB, si avrà pure

$$AC' : C'B = m : n.$$

i due punti C, C' soddisfanno al problema più generale:

Trovare sulla retta AB un punto tale che le sue distanze da A e da B sieno proporzionali a due segmenti dati; o in altre parole al

PROBLEMA. *Dividere armonicamente il segmento AB in un rapporto dato $m : n$*

Infatti

$$CA : CB = C'A : C'B = m : n$$

ALTRA COSTRUZIONE. Coi lati AB e i due segmenti m , n (o due loro equimultipli o equisummultipli)

si costruisca un triangolo e si conducano le bisettrici degli angoli interno ed esterno opposti al lato AB: queste dividono armonicamente AB nel rapporto $m : n$ (n. 287 e 288).

344. PROBLEMA. *Costruire il segmento quarto proporzionale dopo tre segmenti dati a, b, c ; cioè trovare un segmento x tale che: $a : b = c : x$.*

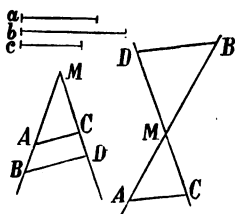


Fig. 168.

Si faccia un angolo qualunque $\widehat{M}$ (fig. 168), sopra un lato si prenda $MA = a$ e nella stessa direzione (o in direzione opposta) $MB = b$, e sull'altro lato $MC = c$; si unisca A con C e da B si conduca la parallela ad AC ad incontrare in D la MC; il segmento cercato è MD, cioè si ha

$$a : b = c : CD$$

2.^a COSTRUZIONE. Fatto un angolo qualunque $\widehat{M}$

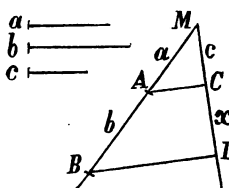


Fig. 169.

(fig. 169) sopra un lato si prendano successivamente $MA = a$, $AB = b$, e sull'altro $MC = c$; si unisca A con C, e da B si conduca la BD parallela ad AC; CD è il segmento cercato, poichè si ha (n. 314 1°)

$$a : b = c : CD.$$

345. PROBLEMA. *Costruire il segmento terzo proporzionale dopo due segmenti dati a, b ; cioè un segmento x tale che $a : b = b : x$.*

Le costruzioni del precedente problema conven-
gono anche a questo, ove si ponga $c = b$.

346. PROBLEMA. *Costruire il segmento medio pro-*

porzionale tra due segmenti dati a, b : cioè un segmento x tale che $a : x = x : b$.

Dalla proporzione si ha (n. 292, 2.° Coroll.) $x^2 = a.b$; perciò il problema è ridotto a quest'altro:

Trovare il lato del quadrato equivalente al rettangolo dei segmenti a, b ; del quale abbiamo dato due costruzioni ai n. 205 e 215.

ALTRA COSTRUZIONE. Sopra una retta qualunque si prenda $AC = b$ (il minore) (fig. 170); poi a partire da A nella direzione AC e da C nella direzione CA si prendano AB e CD eguali ad a : sarà $AD = BC = a - b$. Centri successivamente B e D e raggio eguale ad a si descrivano due circonferenze, e sia E uno dei loro punti d'intersezione: si unisca E con A ed EA è il segmento cercato.

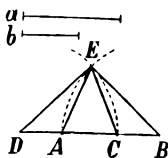


Fig. 170.

Infatti si congiunga E con B, C e D. Il triangolo EBD è isoscele, cioè $ED = EB$, perciò $\widehat{EDA} = \widehat{EBC}$; i triangoli EDA, EBC sono eguali per avere $ED = EB$, $DA = BC$, $\widehat{EDA} = \widehat{EBC}$, da cui $EA = EC$. Allora i triangoli EAC, EAB essendo isosceli ed avendo comune l'angolo alla base $\widehat{EAC}$ sono simili, perciò

$$AB : EA = EA : AC$$

ossia

$$a : EA = EA : b.$$

§ 7.° Superficie dei poligoni simili.

347. TEOREMA. *Due triangoli che hanno un angolo eguale ad un angolo stanno come i rettangoli dei due lati dell'uno e dei due lati dell'altro che comprendono gli angoli eguali.*

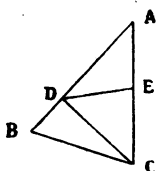


Fig. 171.

Si sovrappongano i due triangoli in modo che i due angoli eguali diventino coincidenti e sieno i triangoli ABC , ADE (fig. 171) coll'angolo $\widehat{A}$ in comune. Si unisca D con C . Intanto si ha (n. 253):

$$\frac{ADE}{ABC} = \frac{ADE}{ADC} \times \frac{ADC}{ABC}$$

ma i triangoli ADE , ADC hanno la stessa altezza rispetto al vertice D , perciò (n. 286 Cor. 1.^a)

$$\frac{ADE}{ADC} = \frac{AE}{AC}$$

così pure i triangoli ADC , ABC hanno la stessa altezza rispetto al vertice C , perciò

$$\frac{ADC}{ABC} = \frac{AD}{AB}$$

e sostituendo nella prima relazione :

$$\frac{ADE}{ABC} = \frac{AE}{AC} \times \frac{AD}{AB}$$

ma (n. 301)

$$\frac{AE \cdot AD}{AC \cdot AB} = \frac{AE}{AC} \times \frac{AD}{AB}$$

perciò

$$\frac{ADE}{ABC} = \frac{AE \cdot AD}{AC \cdot AB}.$$

COROLLARIO. *I triangoli simili stanno come i quadrati dei lati omologhi.*

Infatti se ADE ed ABC fossero simili si avrebbe:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$$

perciò

$$\frac{ADE}{ABC} = \frac{AE}{AC} \times \frac{AE}{AC} = \left(\frac{AE}{AC}\right)^2$$

e poichè (n. 301 Cor.^o)

$$\frac{AE^2}{AC^2} = \left(\frac{AE}{AC}\right)^2$$

si ha infine

$$\frac{ADE}{ABC} = \frac{AE^2}{AC^2}$$

OSSERVAZIONE. In questo caso il triangolo ADC è medio proporzionale fra i triangoli ADE, ABC cioè

$$ADE : ADC = ADC : ABC$$

perchè i due rapporti fra i triangoli sono eguali al rapporto AE : AC.

348. TEOREMA. *Due poligoni simili stanno come i quadrati di due lati omologhi.*

Siano i due poligoni simili ABCDE, A'B'C'D'E' (fig. 172). Si conducano da due vertici omologhi A, A' le diagonali: i due poligoni sono così decomposti nello stesso numero di triangoli simili e similmente posti. Pel teorema precedente si ha

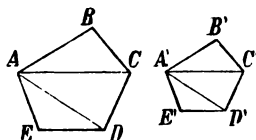


Fig. 172.

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{AC^2}{A'C'^2} \quad \text{ed anche} \quad \frac{ACD}{A'C'D'} = \frac{AC^2}{A'C'^2}$$

da cui

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{ACD}{A'C'D'}$$

analogamente si dimostra che

$$\frac{ACD}{A'B'C'} = \frac{ADE}{A'D'E'}$$

perciò

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{ACD}{A'C'D'} = \frac{ADE}{A'D'E'}$$

cioè i triangoli in cui è decomposto un poligono sono proporzionali ai corrispondenti dell'altro ; da cui (n. 282, 4.°, b)

$$\frac{ABC + ACD + ADE}{A'B'C' + A'C'D' + A'D'E'} = \frac{ABC}{A'B'C'}$$

Ora

$$ABC + ACD + ADE = \text{pol. } ABCDE$$

$$A'B'C' + A'C'D' + A'D'E' = \text{pol. } A'B'C'D'E'$$

di più

$$\frac{ABC}{A'B'C'} = \frac{AB^2}{A'B'^2}$$

dunque sostituendo

$$\frac{\text{pol. } ABCDE}{\text{pol. } A'B'C'D'E'} = \frac{AB^2}{A'B'^2}$$

COROLLARIO. *Due poligoni simili stanno in generale come i quadrati di due segmenti omologhi.*

349. 1.° TEOREMA. *Se quattro segmenti a, b, c, d sono in proporzione, due poligoni simili A e B costruiti sui primi due come lati omologhi, stanno come due altri poligoni simili C e D costruiti sugli altri due come lati omologhi.*

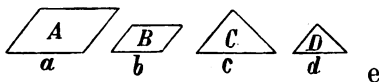


Fig. 173.

Infatti (figura 173)

$$A : B = a^2 : b^2$$

$$C : D = c^2 : d^2$$

ora siccome per ipotesi

$$a : b = c : d$$

si ha pure

$$(a : b)^2 = (c : d)^2$$

ed anche (n. 301 Cor.)

$$a^2 : b^2 = c^2 : d^2$$

dunque

$$A : B = C : D.$$

Reciprocamente

2.° TEOREMA. *Se quattro poligoni simili a due a due sono in proporzione, quattro lati a due a due omologhi di questi poligoni sono in proporzione.*

§ 8.° Problemi.

350. I poligoni simili essendo proporzionali ai quadrati dei lati omologhi, ogni relazione (di estensione) esistente fra due o più quadrati esisterà anche fra i poligoni corrispondenti. Perciò i problemi che riguardano appunto relazioni fra poligoni simili si riconducono ai corrispondenti sui quadrati.

PROBLEMA 1.°. *Costruire un poligono equivalente alla somma o alla differenza di due poligoni simili.*

Si trovi il lato del quadrato equivalente alla somma o alla differenza dei quadrati fatti sui lati omologhi dei poligoni dati (n. 224 e 226), e su questo (come omologo dei medesimi) si costruisca il poligono simile ai dati (n. 328).

2.° *Costruire un poligono simile ad un dato e multiplo, o summultiplo, o multiplo di un summultiplo del medesimo.*

Si trovi il lato del quadrato multiplo o summultiplo o multiplo di un summultiplo secondo i medesimi numeri del quadrato di un lato del poligono dato (n. 325); e su questo, come omologo, si costruisca il poligono simile al dato.

351. PROBLEMA. *Costruire un poligono simile ad*

un poligono dato ed equivalente ad un altro poligono dato.

Siano A e B (fig. 174) i poligoni dati; si tratta di costruire un poligono simile ad A ed equivalente a B .

Si supponga il problema già risolto; indichiamo con X il poligono cercato e con x il suo lato omologo ad un lato a del poligono A . Per la somiglianza dei poligoni A ed X si deve avere.

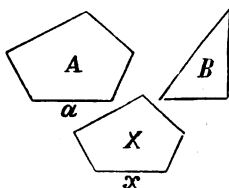


Fig. 174.

$$A : X = a^2 : x^2$$

d'altra parte $X = B$. per cui sostituendo

$$A : B = a^2 : x^2.$$

Si trasformino i due poligoni A e B in quadrati (n. 205 o 215) e sieno $A = a'^2$ e $B = b^2$. Sostituendo nella proporzione si ha

$$a'^2 : b^2 = a^2 : x^2$$

da cui

$$a' : b = a : x$$

dalla quale si ha x (Probl. 344). A questo punto la questione è ridotta a costruire sopra x , come omologo ad a , un poligono simile a B (n. 328 o meglio n. 397).

352. PROBLEMA. *Costruire un poligono simile ad un poligono dato ed equivalente alla somma o alla differenza di altri due poligoni dati.*

Siano A, B, C i poligoni dati e si voglia costruire un poligono simile ad A ed equivalente a $B + C$. Si trasformino i poligoni B e C in quadrati e siano $B = b^2$ e $C = c^2$. Si costruisca un triangolo rettangolo coi cateti eguali a b e c e sia m l'ipotenusa. Si avrà

$$m^2 = b^2 + c^2 \text{ ed anche } m^2 = B + C.$$

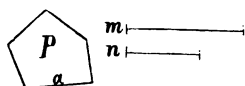
A questo punto la questione è ridotta a costruire un poligono simile ad A ed equivalente ad m^2 (problema precedente).

Nel caso della differenza si faccia $n^2 = b^2 - c^2$ (posto $b > c$) e nel resto si proceda come prima.

353. PROBLEMA. *Costruire un poligono simile ad un poligono dato, e il cui rapporto al poligono stesso sia eguale a quello di due segmenti dati.*

Siano P il poligono ed m, n i segmenti dati (fig. 175).

Si supponga il problema risolto; sia X il poligono ed x il lato omologo di un lato a del poligono P .



Per la somiglianza dei due poligoni P ed X si avrà

$$P : X = a^2 : x^2$$

ma dev'essere

$$P : X = m : n$$

perciò

$$a^2 : x^2 = m : n.$$

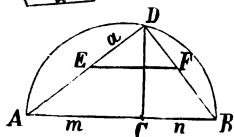


Fig. 175.

Sopra una retta si prenda $AC = m$, $CB = n$ e sulla somma AB come diametro si descriva una semicirconfenza: da C si elevi la perpendicolare ad AB ad incontrare la semicirconfenza in D : si unisca D con A e con B , e sopra DA si prenda $DE = a$; da E si conduca la parallela alla AB ad incontrare in F la DB : dico che DF è il lato x cercato. Infatti dai triangoli DAB , DEF simili si ha

$$a : DF = DA : DB$$

da cui

$$a^2 : DF^2 = DA^2 : DB^2$$

ma (n. 286, Cor. 2.º)

$$DA^2 : DB^2 = AC : BC = m : n$$

e sostituendo

$$a^2 : DF^2 = m : n$$

dunque

$$DF = x.$$

Si costruisca sopra DF come omologo di a il poligono simile a P , e questo sarà il poligono cercato

§ 9.° Figure omotetiche.

354. Due figure $ABC\dots$, $A'B'C'\dots$ (fig. 176) si dicono in *posizione prospettiva od omotetiche*, se i punti delle due figure si corrispondono in modo che le coppie di punti corrispondenti A, A' ; B, B' ;.... siano allineate con uno stesso punto O , e che le distanze OA , OB , $OC\dots$ siano proporzionali alle distanze OA' , OB' , $OC'\dots$ cioè se:

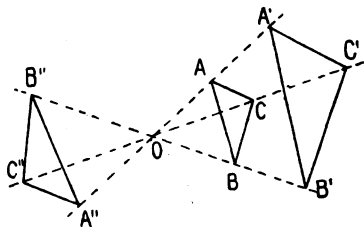


Fig. 176.

$$OA : OB : OC : \dots = OA' : OB' : OC' : \dots$$

Il punto O dicesi *centro di omotetia*, le rette OA , $OB\dots$ raggi di omotetia; il rapporto costante $OA : OA'$ rapporto d'omotetia.

L'omotetia è *diretta* se i raggi d'omotetia sono sovrapposti, come per le figure $ABC\dots$, $A', B', C'\dots$; si dice *inversa*, se i raggi d'omotetia sono opposti, come per le figure $ABC\dots$, $A'', B'', C''\dots$

355. TEOREMA. *Data una figura $ABC\dots$ si può costruire una figura omotetica a questa, sia direttamente che inversamente rispetto ad un punto dato O , ed avente con essa un dato rapporto di omotetia k .*

Basta infatti condurre i raggi OA , OB , $OC\dots$ (fig. 171) e su questi (o sugli opposti) prendere rispettivamente i segmenti OA' , OB' , $OC'\dots$, tali che:

$$OA : OA' = OB : OB' = \dots = k.$$

La figura $A'B'C'$... sarà omotetica direttamente (o inversamente) alla data e nel rapporto dato.

356. TEOREMA 1.º. *Due figure omotetiche sono simili direttamente.*

Infatti se le figure sono omotetiche direttamente come $ABC...$, $A'B'C'...$ (fig. 173), il rapporto tra due segmenti corrispondenti, come $AB : A'B'$, è eguale al rapporto di omotetia ($OA : OA'$); ed i segmenti stessi sono nella stessa direzione; se inversamente come $ABC...$, $A''B''C''...$, i segmenti corrispondenti sono in direzione opposta; perciò in amendue i casi i triangoli ABC , $A'B'C'...$; o ABC , $A''B''C''...$ sono simili direttamente.

Reciprocamente:

2.º TEOR. *Due figure simili direttamente e coi segmenti omologhi paralleli sono omotetiche: direttamente od inversamente secondochè i segmenti omologhi sono nella stessa direzione od in direzione opposta.*

Siano $ABC...$, $A'B'C'...$ (fig. 177) due figure simili di-

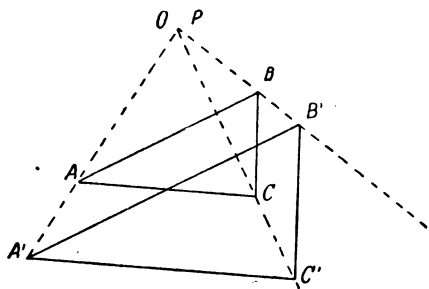


Fig. 177.

rettamente e coi segmenti AB , $A'B'$; BC , $B'C'$;..... rispettivamente nella stessa direzione. Si conducano AA' e BB' che si incontreranno nei loro prolungamenti in un punto O . I triangoli OAB , $OA'B'$ sono simili (n. 317 Cor.) perciò

$$OA : OA' = AB : A'B'$$

Si conduca CC' e supponiamo che incontri in P la AA' ; dai triangoli simili OAC , $OA'C'$ si ha:

$$PA : PA' = AC : A'C'$$

Ma i secondi rapporti sono eguali per ipotesi; perciò

$$OA : OA' = PA : PA'$$

il che è assurdo, a meno che O e P non coincidano. Dunque AA' , BB' , CC' concorrono in un punto O ; di più

$$OA : OA' = OB : OB' = \dots$$

dunque le figure sono omotetiche, ed in questo caso direttamente perchè i raggi OA , OA' ... sono sovrapposti.

Analogamente si dimostra che se AB , $A'B'$; BC , $B'C'$; ecc. sono in direzione opposta, le figure sono omotetiche inversamente, perchè il punto d'incontro delle AA' e BB' lascia da bande opposte i punti A e A' ; così dicasi delle altre coppie di punti corrispondenti.

357. Date due figure omotetiche, per es. $ABC...$, $A'B'C'...$, (fig. 176), se si considera il punto O come appartenente alla prima, il suo corrispondente nell'altra è lo stesso punto O , perchè i triangoli OAB , $OA'B'$ sono simili direttamente. Si dice allora che il punto O è un *punto doppio* delle due figure. Perciò

TEOREMA. *Due figure omotetiche hanno un punto doppio che è il centro di omotetia, e quello solo.*

358. **TEOREMA.** *Due figure simili direttamente hanno un punto doppio ed uno solo: facendo rotare una delle figure intorno a questo punto, si può ridurla omotetica (sia direttamente che inversamente) dell'altra rispetto al punto stesso.*

Siano $ABC...$, $A'B'C'$ (fig. 178) due figure simili direttamente. Si uniscano due coppie di punti corrispondenti A, A' e B, B' e si dividano i segmenti AA' e BB' armonicamente nel rapporto $(AB : A'B')$ di similitudine delle due figure, ed infine si costruiscano le circonferenze di Apollonio, luoghi dei punti che hanno da A, A' per la prima, e da B, B' per l'altra, distanze proporzionali ad AB ed $A'B'$. Le due circonferenze si incontrino nei due punti O ed O' : questi colle coppie A, B ed A', B' determinano due coppie di triangoli simili per avere i lati proporzionali; la prima coppia OAB , $OA'B'$ simili direttamente, l'altra $O'AB$, $O'A'B'$ inversamente ⁽¹⁾. Il punto O è il punto cercato. Infatti per essere $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$ anche $\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'}$: perciò se si fa rotare la figura $A'B'C'...$ intorno ad O dell'angolo $\widehat{AOA'}$ nel verso

⁽¹⁾ I due punti O, O' giacciono da una stessa banda rispetto ad uno dei segmenti $(A'B')$, e da bande opposte rispetto all'altro (AB) ; epperò rispetto a due osservatori che vadano l'uno da A verso B e l'altro da A' verso B' uno dei punti (O) si trova dalla stessa banda, e l'altro (O') da bande opposte.

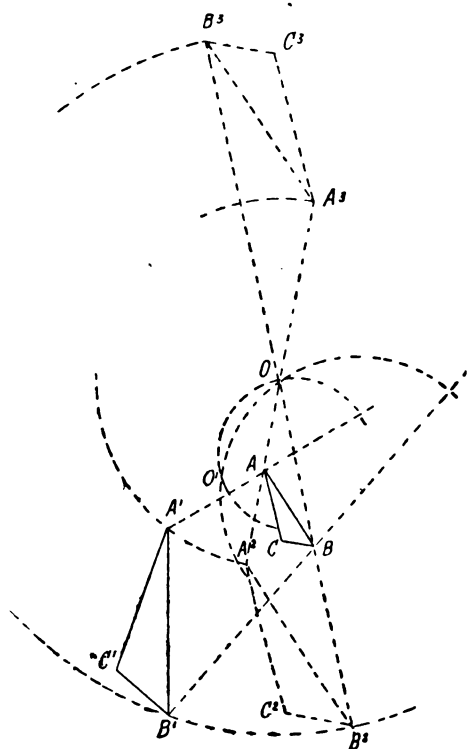


Fig. 178.

indicato, essa si dispone omotetica direttamente alla prima rispetto ad O : e se si fa rotare nel senso inverso dell'angolo $\widehat{AOA_3}$ supplementare di $\widehat{AOA'}$ si dispone omotetica inversamente alla prima rispetto allo stesso punto. Esso è unico poi, perchè le altre coppie di triangoli come OAC , $OA'C'$,... risultano simili direttamente, epperò le circonferenze di Apollonio relative alle altre coppie $C, C', \dots$ di punti corrispondenti devono passare per quel punto.

359. TEOREMA.

Se due figure sono

omotetiche e l'una ha il centro, anche l'altra ha il centro che è il punto omologo del primo. Di più le due figure sono omotetiche tanto direttamente che inversamente.

Siano le due figure $AB\dots$, $A'B'\dots$ (fig. 179) omotetiche direttamente rispetto ad M , e sia O il centro della prima. Ciò significa che ogni segmento, come AB , che passa per O è dimezzato in O , cioè $OA = OB$. Allora anche i punti A', O', B' corrispondenti dei punti A, O, B sono allineati ed $O'A' = O'B'$; cioè O' è il centro della seconda figura; ed i segmenti omologhi, come OA , $O'A'$, sono nella stessa direzione. Di più ogni punto di questa figura, come A' , ha nella figura stessa

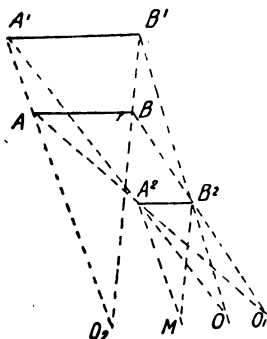


Fig. 180.

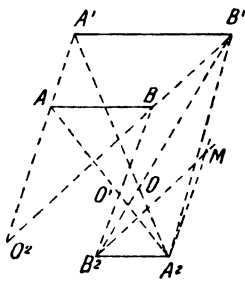


Fig. 181.

dei raggi condotti da A_2 e da B_2 nella stessa direzione di AO_2 , BO_2) deve trovarsi sulla O_1O_2 . D'altra parte, se si considera O_2 come punto della figura $A_1B_1...$, il suo corrispondente nella figura $A_2B_2...$ (punto d'incontro dei raggi condotti da A_2 e da B_2 nella stessa direzione di A_1O_2 , B_1O_2 e perciò che coincidono coi precedenti) è ancora M ; il quale perciò deve trovarsi sulla OO_2 . Dunque i tre punti O, O_1, O_2 insieme con M sono sopra una stessa retta.

Osservazione 1.^a Le tre omotetie o sono tutte tre dirette (come nel caso precedente), o sono una diretta e due inverse come nella fig. 181. In questo caso essendo diretta l'omotetia di centro O_2 ed inversa quella di centro O_1 , le figure $A_1B_1...$, $A_2B_2...$ hanno i segmenti omologhi in direzione opposta, perciò sono omotetiche inversamente rispetto ad O . Allora i raggi da condursi da A_1 e da B_1 per avere il corrispondente di O_2 devono essere in direzione opposta ad AO_2 e BO_2 (e ad A_1O_2 e B_1O_2). Il ragionamento è il medesimo.

Nel primo caso la retta OO_1O_2 si dice *asse d'omotetia diretta*, nel secondo *asse d'omotetia inversa*.

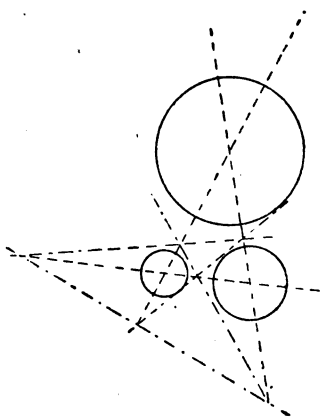


Fig. 182.

Osservazione 2.^a Se le figure hanno centro, si sa che sono omotetiche a due a due tanto direttamente, quanto inversamente. In tal caso si hanno quattro assi di omotetia; uno di omotetia diretta e tre di inversa (fig. 182).

362. In quello che si è esposto sulla omotetia si è tacitamente supposto che il rapporto di omotetia fosse diverso dall'unità

Se questo rapporto è l'unità, l'omotetia inversa si riduce alla simmetria rispetto ad un punto, e ciò non presenta alcuna eccezione: ma nel caso dell'omotetia diretta le figure oltre che simili sono eguali direttamente e coi segmenti omologhi nella stessa direzione, perciò le rette AA' , BB' ,... (fig. 183) che uniscono le coppie di punti corrispondenti sono parallele, e più non esiste il centro di omotetia. In questo caso si dice che le figure

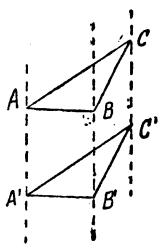


Fig. 183.

sono *omotetiche affini*. Invitiamo lo studioso a fare le opportune modificazioni ai teoremi precedenti, posto che alcune o tutte le omotetie dirette considerate diventino affini; il che non presenta alcuna difficoltà.

La teoria delle figure omotetiche riesce utile alla risoluzione di molti problemi, specie ove si cercano figure di posizione assegnata. Eccone qualche esempio.

363. PROBLEMA. *Condurre una tangente comune a due circonferenze.*

Siano O, O' le circonferenze date (fig. 184) È chiaro intanto che una tangente comune unisce due punti omologhi delle due figure, perciò passerà per il centro d'omotetia (diretta o inversa). Se si conducono due raggi nella stessa direzione OA , $O'A''$ (o in direzione opposta OA , $O'A'$) e si congiunge A con A'' (o con A') la AA'' incontra la OO' nel centro C di omotetia diretta (la AA' incontra la OO' nel centro C' di

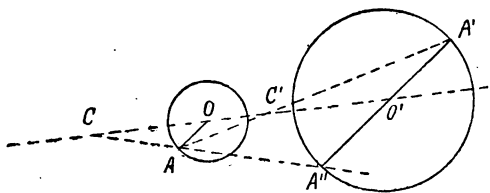


Fig. 184.

congiunge A con A'' (o con A') la AA'' incontra la OO' nel centro C di omotetia diretta (la AA' incontra la OO' nel centro C' di

omotetia inversa). A questo punto la questione è ridotta a condurre per C (per C') una tangente alla circonferenza O che sarà tangente anche alla O'. Il problema ha 4 soluzioni che si riducono a 3, 2, 1 o nessuna nelle diverse posizioni delle due circonferenze.

364. PROBLEMA. *Descrivere una circonferenza passante per un punto dato e tangente a due rette date.*

Omettiamo il caso assai semplice che le rette date siano parallele. Siano adunque A il punto dato (fig. 185) e le due rette date che s'incontrino in M. Si conduca la bisettrice dell'angolo $\widehat{M}$, dove trovasi il punto A, e si costruisca una circonferenza tangente alle due rette, prendendo come centro un punto qualunque O della bisettrice. Questa circonferenza è omotetica della cercata rispetto ad M: perciò MA è un raggio di omotetia. Sia B nn punto d'incontro di MA colla circonferenza O: sarà B il corrispondente di A. Condotta allora da A il raggio della stessa direzione di BO ad incontrare la bisettrice in C, il segmento AC è il corrispondente di BO; epperò C è il centro della circonferenza cercata.

L'altro punto D d'incontro della MA colla circonferenza O, ritenuto pure come corrispondente di A, dà un'altra soluzione del problema, che è la circonferenza di raggio EA.

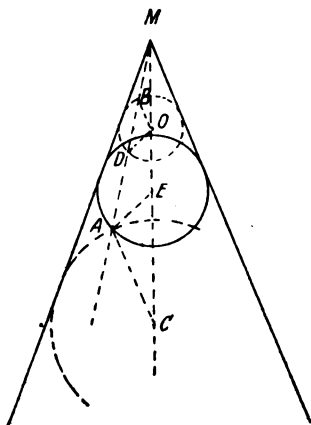


Fig. 185.

365. PROBLEMA. *Incrivere in un segmento circolare un rettangolo simile ad un rettangolo dato.*

Sia AB (fig. 186) il segmento circolare. Si costruisca sopra AB e dalla stessa banda del segmento il rettangolo ABCD simile al dato: si unisca il punto medio O della corda AB con C e con D, e queste congiungenti incontrino in E, F l'arco AB: si conducano le EG,

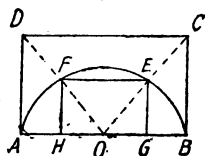


Fig. 186.

per essere le metà rispettivamente degli angoli FCO, BC'O (n. 148). Perciò;

$$OE' : OA = OB : OD.$$

Se si immagina ora la OM, che supponiamo incontri nuovamente la circonferenza incognita in N, si ha (n. 293, 2.^o):

$$OM : OA = OB : ON$$

dalla quale proporzione e dalla precedente si deduce (numero 282, 3.^o c)

$$OM : OE' = OD : ON$$

Resta così determinato il punto N (n. 344). A questo punto la questione è ridotta a descrivere una circonferenza passante per due punti M, N e tangente alla C, che sarà tangente anche a C' (n. 232).

Il problema ammette quattro soluzioni; cioè la circonferenza incognita può essere tangente alle due date o esternamente (come si è fatto) o internamente; oppure esternamente all'una ed internamente all'altra. Le soluzioni si riducono di numero e possono anche mancare a seconda delle posizioni relative degli elementi dati.

367. PROBLEMA. *Descrivere una circonferenza tangente a tre circonferenze date.*

Siano C, C', C'' le tre circonferenze date (fig. 188) aventi per raggi rispettivamente R, R', R''. Supposto $R > R' > R''$, si descrivano coi centri in C e C' e coi raggi rispettivi $R - R''$ ed $R' - R''$ (oppure $R + R''$ ed $R' + R''$) due circonferenze, che chiameremo C₁, C'₁. Si descrivano ora le circonferenze tangenti alle C₁ e C'₁ e passanti per il punto C'' (probl. precedente). È chiaro allora che le circonferenze concentriche a quest'ultime, ed aventi per raggi i raggi delle medesime aumentati o diminuiti a seconda dei casi di R'', saranno tangenti alle tre circonferenze date.

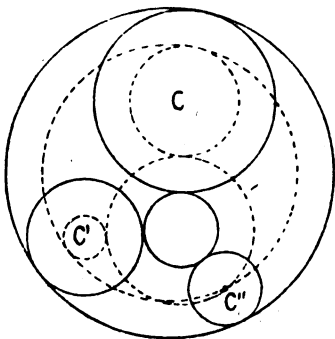


Fig. 188.

Le soluzioni di questo problema (che possono essere

fino ad otto, nella figura ne sono indicate solo due) dipendono adunque da quelle del problema precedente.

Se fosse $R' = R''$ la circonferenza C_1 manca e si riduce cioè al punto C . E allora invece delle circonferenze di cui al problema precedente si descrivono le circonferenze tangenti alla C_1 e passanti per i due punti C' , C'' (n. 232).

Se infine $R = R' = R''$ si descrive prima la circonferenza dei tre punti C , C' , C'' .

§ 10. Poligoni regolari iscritti e circoscritti.

Si è già osservato al n. 176 che il problema: *Iscrivere e circoscrivere ad un cerchio un poligono regolare di n lati* è ridotto a quest'altro: *Dividere la circonferenza in n parti eguali*. Risolviamo ora questo problema per alcuni casi particolari.

368. PROBLEMA. *Dividere la circonferenza in 4, 8, 16.... parti eguali.*

Sia la circonferenza O (fig. 189; si conducano due diametri AC , BD perpendicolari fra loro; questi dividono la circonferenza in quattro parti eguali, perciò le corde AB , BC , CD , DA formano il quadrato iscritto, e le tangenti nei punti A , B , C , D formano il quadrato $EFGH$ circoscritto. Dividendo per mezzo gli archi $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{DA}$, la circonferenza è divisa in 8 parti, da cui si otterranno l'ottagono inscritto ed il circoscritto; così di seguito i poligoni di 16, 32... lati iscritti e circoscritti.

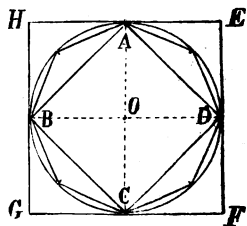


Fig. 189.

VALORI DEI LATI. Indicando con r il raggio del cerchio e con l_4 , L_4 i lati dei quadrati iscritti e cir-

coscritto, si ha intanto: $L_4 = 2r$. Di più dal triangolo AOB rettangolo in O

$$AB^2 = AO^2 + OB^2$$

ossia $l_4^2 = 2r^2$

da cui $l_4 = r \sqrt{2}$

369. PROBLEMA. *Dividere la circonferenza in 3, 6, 12... parti eguali.*

Sia la circonferenza O (fig. 190): si adatti in essa una corda AB eguale al raggio; dico che l'arco $\widehat{AB}$ è la sesta parte della circonferenza. Infatti congiungasi O con A e con B: il triangolo OAB essendo equilatero è anche equiangolo, da cui

$$\widehat{AOB} = \frac{1}{3} 2\widehat{R} = \frac{1}{6} 4\widehat{R};$$

perciò l'arco $\widehat{AB}$ è un sesto della circonferenza e $2\widehat{AB}$ sarà la terza parte. Dopo ciò è ovvio come si debba procedere per dividere la circonferenza in 3, 6, 12... parti eguali e costruire i poligoni di 3, 6, 12.... lati iscritti e circoscritti.

VALORI DEI LATI. — Indichiamo con l_3, L_3 i lati del triangolo iscritto e circoscritto, con l_6, L_6 i lati degli esagoni. Dal triangolo ACD rettangolo in D si ha

$$AC^2 = AD^2 - CD^2$$

ossia $l_3^2 = 4r^2 - r^2 = 3r^2$

da cui $l_3 = r \sqrt{3}$.

Nel triangolo LMN, AC è parallela ad LN, perciò

$$MN : MA = LN : AC$$

e per essere $MN = 2MA$, anche $LN = 2AC$; ossia

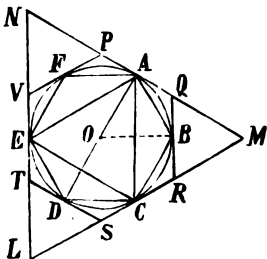


Fig. 190.

$$L_3 = 2l_3 = 2r \sqrt{3}.$$

Si è già osservato che $l_6 = r$. Infine essendo QR parallela ad LN, il triangolo MQR è equiangolo è perciò anche equilatero, ossia $MQ = QR$: ma $QR = PQ$, dunque $MQ = QP$ ed anche $= PN$: dal che si conclude

$$PQ = \frac{1}{3} MN,$$

ossia

$$L_6 = \frac{1}{3} L_3 = \frac{2}{3} r \sqrt{3}.$$

370. PROBLEMA. *Dividere la circonferenza in 5, 10, 20,.. parti eguali.*

Sia O la circonferenza (fig. 191): si conduca un raggio OA, lo si divida in media ed estrema ragione in C (n. 229), e si adatti nella circonferenza una corda AB eguale alla parte maggiore OC del raggio OA: l'arco $\widehat{AB}$ è la decima parte della circonferenza. Infatti congiungendo O con A e con B, si è già dimostrato (n. 230) che un triangolo, come AOB, ha l'angolo al vertice $\widehat{AOB} = \frac{1}{5} 2\widehat{R}$, ossia

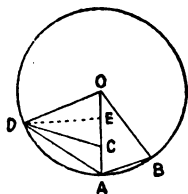


Fig. 191.

$\widehat{AOB} = \frac{1}{10} 4\widehat{R}$; dunque $\widehat{AB}$ è un decimo della circonferenza, e $2\widehat{AB} = \widehat{AD}$ ne sarà la quinta parte. Procedendo come nei problemi precedenti si potrà dividere la circonferenza in 5, 10, 20.... parti eguali e costruire i poligoni di 5, 10, 20... lati iscritti e circoscritti.

VALORE DEI LATI. Sia l_{10} il lato del decagono

iscritto. Dalla figura 129 (n. 229) se $AB = r$, è
 $AE = l_{10}$. Ora

$$AB = AD = AC - CD$$

ma

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4}}$$

e riducendo

$$AC = \frac{r}{2} \sqrt{5}$$

di più $CD = \frac{r}{2}$, perciò

$$AE = l_{10} = \frac{r}{2} \sqrt{5} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} (\sqrt{5} - 1).$$

Per trovare l_5 cioè AD (fig. 191) dimostreremo il
TEOREMA. *Il quadrato del lato del pentagono regolare equivale alla somma dei quadrati dei lati dell'esagono e del decagono iscritti nello stesso cerchio.*

Infatti unendo D con C i due triangoli DOC , OAB sono eguali per avere $DO = OA$, $OC = AB$,
 $\widehat{DOC} = \widehat{OAB} = \frac{1}{5} 4 \widehat{R}$; perciò $DC = OB$. Conducasi DE perpendicolare ad OC ; dal triangolo DOA ($\widehat{DOA} < \widehat{R}$) si ha (n. 216).

$$AD^2 = OD^2 + OA^2 - 2OE.OA$$

ma $2OE.OA = OC.OA$ e $OA^2 - OC.OA = OA.AC$

di più $OA.AC = OC^2$

perciò $AD^2 = OD^2 + OC^2$

Sostituendo ora ai quadrati i loro valori

$$l_5^2 = r^2 + \frac{r^2}{4} (\sqrt{5} - 1)^2$$

da cui riducendo si deduce

$$l_3 = \frac{r}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

371. PROBLEMA. *Dividere la circonferenza in 15, 30, 60... parti eguali.*

Sia O la circonferenza (fig. 192): si prenda l'arco $\widehat{AB}$ eguale a $\frac{1}{6}$ della circonferenza, e su questo l'arco $\widehat{AC}$ eguale ad $\frac{1}{10}$ della circonferenza: siccome $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$, si avrà che l'arco $\widehat{BC}$ è eguale a $\frac{1}{15}$ della circonferenza. Pro-

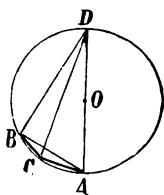


Fig. 192.

cedendo come nei problemi precedenti si divide la circonferenza in 15, 30, 60... parti, e si costruiscono i poligoni di 15, 30, 60... lati inscritti e circoscritti.

Valore del lato del poligono inscritto di 15 lati ⁽¹⁾. Indichiamo con l_{15} questo lato. Si conduca il diametro AD e si uniscano i punti A e D con B e con C. Dal quadrilatero ABCD pel teorema di Tolomeo (n. 223) si ha

$$AB \cdot CD = AD \cdot BC + AC \cdot BD.$$

Ma

$$AD = 2r, \quad DB = l_3 = r\sqrt{3}, \quad BC = l_{15}.$$

$$CA = l_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1), \quad AB = l_6 = r$$

e finalmente per essere $CD^2 = AD^2 - AC^2$ si ha

$CD = \sqrt{4r^2 - l_{10}^2}$
e sostituendo il valore di l_{10} e riducendo

$$CD = \frac{r}{2} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

(1) Vedi il problema n. 311.

Sostituendo nella prima relazione si ha

$$\frac{r^2}{2} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = 2rl_{15} + \frac{r^2}{2} \sqrt{3} (\sqrt{5} - 1)$$

da cui

$$l_{15} = \frac{r}{4} \left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{3} (\sqrt{5} - 1) \right)$$

372. PROBLEMA. *Dato il lato di un poligono regolare iscritto, trovare il lato del poligono regolare circoscritto dello stesso numero di lati.*

Sia O una circonferenza (fig. 193), AB il lato del poligono regolare iscritto. Si conduca da O la

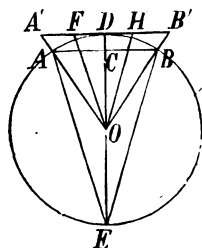


Fig. 193.

perpendicolare alla AB ad incontrare AB in C e la circonferenza in D: si conduca la tangente in D alla circonferenza ad incontrare i raggi OA, OB (prolungati) in A' e B'. È chiaro che A'B' è il lato del poligono regolare circoscritto cercato.

Dai triangoli simili AOB, A'O'B' si ha (n. 336)

$$A'B' : AB = OD : OC$$

Pongasi ora $A'B' = L_n$, $AB = l_n$ (l'indice n è il numero dei lati), $OD = r$; di più $OC = \sqrt{OA^2 - AC^2}$, ossia

$$OC = \sqrt{r^2 - \left(\frac{l_n}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - l_n^2}$$

sostituendo nella proporzione, questa diventa

$$L_n : l_n = r : \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - l_n^2}$$

da cui

$$L_n = \frac{2rl_n}{\sqrt{4r^2 - l_n^2}}$$

• 373. PROBLEMA. *Dato il lato di un poligono regolare iscritto, trovare il lato del poligono regolare iscritto di un numero doppio di lati.*

Nella figura 193 sia $AB = l_n$ il lato del poligono dato; essendo D il punto di mezzo dell'arco $\widehat{AB}$, è AD il lato del poligono iscritto cercato, lato che indicheremo con l_{2n} . Si completi il diametro DE; dal triangolo DAE rettangolo in A si ha (n. 203).

$$AD^2 = DE \cdot DC$$

Ora $AD = l_{2n}$, $DE = 2r$, e $DC = DO - OC$,
ossia

$$DC = r - \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - l_n^2}$$

per cui sostituendo questi valori la relazione diventa

$$l_{2n}^2 = 2r \left(r - \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - l_n^2} \right)$$

ed anche

$$l_{2n}^2 = r(2r - \sqrt{4r^2 - l_n^2})$$

da cui finalmente

$$l_{2n} = \sqrt{r(2r - \sqrt{4r^2 - l_n^2})}$$

OSSERVAZIONE. Colle due formole trovate, noto il lato di un poligono regolare iscritto, si possono calcolare i lati dei poligoni regolari iscritti e circoscritti che si ottengono raddoppiando continuamente il numero dei lati stessi.

374. Aggiungiamo una terza formola che, se non è necessaria, tornerà utile in seguito.

Si conducano le bisettrici degli angoli $\widehat{AOD}$, $\widehat{DOB}$ (fig. 193) ad incontrare la $A'B'$ nei punti F ed H: si ha

$$\widehat{FOH} = \frac{1}{2} \widehat{AOB'} = \widehat{AEB},$$

ed FH è il lato del poligono regolare circoscritto di $2n$ lati, e che indicheremo con L_{2n} . Dai triangoli simili FOH, AEB si ha (n. 303, 1°)

$$FH : AB = OD : CE$$

e sostituendo i valori corrispondenti (tenuto conto che $CE = CO + OE$)

$$L_{2n} : l_n = r : \left(r + \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - l_n^2} \right)$$

da cui

$$L_{2n} = \frac{2rl_n}{2r + \sqrt{4r^2 - l_n^2}}$$

e rendendo razionale il denominatore col moltiplicare i due termini della frazione per $2r - \sqrt{4r^2 - l_n^2}$

$$L_{2n} = \frac{2r (2r - \sqrt{4r^2 - l_n^2})}{l_n}$$

§ 11.° Misura della circonferenza e del cerchio.

375. Ai numeri 298 e 299 si è veduto come si trova la misura circolare o ampiezza degli archi e dei settori circolari. Ma gli archi e le circonferenze sono linee finite e come tali si è cercato di determinarne la lunghezza. Così i settori ed i cerchi sono parti finite di piano e come tali si è cercato di determinarne l'area.

Per queste grandezze però non valgono i procedimenti tenuti per le altre di cui già si è determinata la lunghezza e l'area rispettivamente, poichè è impossibile sia trovare un segmento equivalente ad una circonferenza (rettificare la circonferenza) o ad una sua parte, sia trovare un quadrato equivalente ad un cerchio (quadrare il cerchio) o ad una sua parte.

I due seguenti teoremi definiscono il cerchio e la circonferenza in modo opportuno per dedurne rispettivamente l'area e la lunghezza.

376. TEOREMA. *I poligoni regolari circoscritti ed iscritti ad un cerchio, dove il numero dei lati vada raddoppiando indefinitamente, sono due serie convergenti, ed il cerchio è il loro limite.*

Sia dato un cerchio a cui si suppongano circoscritti ed iscritti due poligoni regolari dello stesso numero di lati, p. es. due quadrati. Si circoscrivano e si iscrivano successivamente i poligoni regolari di 8, 16, 32.... lati. Queste due serie di poligoni sono convergenti. Infatti è chiaro intanto che:

1.° *La serie dei poligoni circoscritti decresce limitatamente:* perchè ciascuno è minore del precedente e tutti sono maggiori di un qualsiasi poligono circoscritto.

2.° *La serie dei poligoni iscritti cresce limitatamente:* poichè ciascuno è maggiore del precedente e tutti sono minori di un poligono qualsiasi circoscritto.

Bisogna ora provare che le differenze fra le dette due serie decrescono illimitatamente.

A tale scopo premettiamo:

1.° *I lati dei poligoni regolari iscritti decrescono illimitatamente.*

Infatti, come già si è detto, il perimetro di un poligono iscritto è minore del perimetro di un poligono circoscritto, p. es. di quello del quadrato che è $8r$ (r è il raggio del cerchio).

Sia ora x un segmento assegnato piccolo quanto si vuole: fra i suoi multipli ve ne sarà uno nx tale che sia $nx > 8r$ (n. 72). Si iscriva nel cerchio un

poligono regolare di n lati (o di un numero maggiore tra quelli che si sanno iscrivere): detto l_n il suo lato, il suo perimetro $nl_n < 8r$, ma $8r < nx$, dunque $nl_n < nx$, da cui: $l_n < x$; ossia i lati dei poligoni regolari iscritti decrescono illimitatamente ⁽¹⁾.

2.^o *Gli apotemi dei poligoni regolari iscritti crescono limitatamente ed hanno per limite il raggio del cerchio.*

Infatti è chiaro che ciascun apotema è maggiore del precedente e tutti sono minori del raggio. Di più se a_n è l'apotema del poligono di n lati, si ha:

$$r - a_n < \frac{l_n}{2}$$

(nella figura 193, $OA - OC < AC$); ma l_n decresce illimitatamente al raddoppiare di n , dunque anche la differenza $r - a_n$ decresce illimitatamente, ossia r è il limite di a_n ⁽²⁾.

Tornando ora al primo teorema, sieno S_n ed s_n due poligoni regolari di n lati, l'uno circoscritto e l'altro iscritto. Si sa che (n. 348 Cor.)

⁽¹⁾ Anche i lati dei poligoni regolari circoscritti decrescono illimitatamente. Infatti per ciascuna delle serie di poligoni che sappiamo costruire è chiaro intanto che i perimetri vanno decrescendo; di più (ritenendo quanto sopra si è detto) nella serie che comincia ad es. col quadrato si circoscriva il poligono di n lati (o di un numero maggiore tra quelli che si sanno circoscrivere); detto L_n il suo lato, il perimetro nL_n è minore di $8r$; ma $8r < nx$, dunque $nL_n < nx$, ed $L_n < x$.

⁽²⁾ Notisi che per brevità di locuzione qui l_n ed a_n non rappresentano un particolare lato od apotema, ma piuttosto le serie dei lati e degli apotemi ottenute colla solita legge, cioè col raddoppiare di n . Così dicasi degli altri simboli che seguono.

$$S_n : s_n = r^2 : a_n^2$$

da cui (n. 282, 4.°, α)

$$S_n : (S_n - s_n) = r^2 : (r^2 - a_n^2)$$

o (per essere $r^2 - a_n^2 = \frac{l_n^2}{4}$)

$$S_n : (S_n - s_n) = r^2 : \frac{l_n^2}{4}$$

ed ancora (n. 282, 2.°)

$$S_n : (S_n - s_n) = 4r^2 : l_n^2.$$

Ma per $n > 4$, $S_n < 4r^2$ (quadrato circoscritto),
perciò

$$S_n - s_n < l_n^2 :$$

ma se l_n decresce illimitatamente, lo stesso avviene di l_n^2 (268, 1.°): dunque anche $S_n - s_n$ decresce illimitatamente al raddoppiare di n , e le due serie di poligoni sono convergenti ⁽¹⁾.

Finalmente se si osserva, che il cerchio è compreso fra le stesse serie, perchè maggiore dei poligoni iscritti e minore dei circoscritti, si conclude che il cerchio è appunto il loro limite.

377. TEOREMA. *I perimetri dei poligoni regolari circoscritti ed iscritti ad un cerchio al raddoppiare indefinitamente del numero dei lati sono convergenti.*

Con un ragionamento pari a quello del teorema precedente si deduce:

1.° *La serie dei perimetri dei poligoni circoscritti decresce limitatamente.*

(¹) Si potrebbe domandare se, qualunque sieno le serie dei poligoni considerati, il limite è sempre lo stesso: è facile vedere che sì, perchè se S_n , s_n sono due serie convergenti ed S_n' , s_n' altre due serie convergenti di poligoni, si ha sempre

$$S_n > s_n \text{ e } S_n > s_n';$$

e perciò i limiti sono eguali (n. 270).

2.^o *La serie dei perimetri dei poligoni iscritti cresce limitatamente.*

3.^o *Le differenze fra queste serie decrescono illimitatamente.*

Infatti sieno P_n e p_n i perimetri di due poligoni regolari di n lati, l'uno circoscritto e l'altro iscritto. Si sa che (n. 330 e 336)

$$P_n : p_n = r : a_n$$

da cui

$$P_n : (P_n - p_n) = r : (r - a_n)$$

ed anche

$$P_n : (P_n - p_n) = 8r : 8(r - a_n).$$

Ma per $n > 4$, $P_n < 8r$ (perimetro del quadrato circoscritto), perciò

$$P_n - p_n < 8(r - a_n).$$

Ora $r - a_n$ decresce illimitatamente al raddoppiare di n ; dunque $8(r - a_n)$ ed anche $P_n - p_n$ decrescono illimitatamente al raddoppiare di n : ossia le serie rappresentate da P_n e p_n sono convergenti ed hanno lo stesso limite ⁽¹⁾.

378. Se si riflette che, raddoppiando continuamente il numero dei lati dei detti poligoni, i loro contorni tendono a confondersi colla circonferenza, e che i perimetri dei medesimi (equivalenti ai detti contorni) sono convergenti ad uno stesso segmento limite, si è indotti ad ammettere che questo segmento limite sia appunto equivalente alla circonferenza; cioè ad ammettere il seguente

POSTULATO. *Il segmento limite dei perimetri dei poligoni regolari circoscritti ed iscritti ad una circonferenza dove il numero dei lati va continuamente raddoppiando, è equivalente alla circonferenza.*

(¹) Analoga osservazione che alla nota della pag. 290.

379. TEOREMA. *Le circonferenze sono proporzionali ai raggi ed i cerchi ai quadrati dei raggi.*

Sieno C, C' due circonferenze, r, r' i loro raggi: si circoscrivano (o si iscrivano) due poligoni regolari di n lati e sieno P_n, P'_n i loro perimetri. Si sa che

$$P_n : P'_n = r : r'$$

ma al raddoppiare di n , P_n e P'_n hanno per limiti rispettivamente C e C' ed il rapporto $P_n : P'_n$ non varia; dunque lo stesso rapporto vi sarà anche tra i limiti (n. 290); ossia si avrà

$$C : C' = r : r'.$$

Analogamente si dimostra che, detti A, A' i due cerchi, si ha

$$A : A' = r^2 : r'^2.$$

Perciò ogni relazione di estensione esistente fra due o più segmenti esiste fra le circonferenze che hanno per raggi questi segmenti; ed ogni relazione che esiste fra i quadrati di due o più segmenti, esiste anche fra i cerchi che hanno per raggi detti segmenti.

COROLLARIO 1.° *Gli archi simili (n. 336, 3.°) sono proporzionali ai raggi ed i settori simili (n. 336, 3.°) ai quadrati dei raggi.*

COROLLARIO 2.° Dalla proporzione $C : C' = r : r'$ si ha

$$C : C' = 2r : 2r'$$

e permutando i medi

$$C : 2r = C' : 2r'$$

cioè:

Il rapporto fra una circonferenza ed il suo diametro è costante.

Così pure dalla proporzione

$$A : A = r^2 : r'^2$$

si ha

$$A : r^2 = A' : r'^2$$

cioè:

Il rapporto fra un cerchio ed il quadrato del raggio è costante.

380. TEOREMA. *Il cerchio equivale al rettangolo della semicirconferenza e del raggio.*

Infatti un triangolo, che ha la base equivalente alla circonferenza e l'altezza al raggio, è sempre compreso, come il cerchio, fra i poligoni circoscritti e gli iscritti, perchè minore dei primi e maggiore dei secondi; perciò il triangolo ed il cerchio sono equivalenti. Ma il triangolo equivale al rettangolo di metà base e della stessa altezza, dunque il cerchio equivale al rettangolo della semicirconferenza e del raggio.

COROLLARIO. *Il settore circolare equivale al rettangolo della metà dell'arco corrispondente e del raggio.*

Infatti (n. 285)

$$\text{settore} : \text{cerchio} = \text{arco} : \text{circonf.}$$

ora si ha pure (n. 286)

$$\frac{1}{2} \text{raggio} \cdot \text{arco} : \frac{1}{2} \text{raggio} \cdot \text{circonf.} = \text{arco} : \text{circonf.}$$

ma le due proporzioni hanno il 2.º, 3.º e 4.º termine equivalenti, perciò anche i primi sono equivalenti, ossia

$$\text{settore} = \frac{1}{2} \text{raggio} \cdot \text{arco}$$

381. Si dice *anello* o *corona circolare* la parte di cerchio compresa fra due circonferenze concen-

triche. Si dice *settore annulare* la parte di anello compresa fra due raggi.

TEOREMA. *Il settore annulare equivale al trapezio che ha le basi equivalenti ai due archi che limitano il settore, e l'altezza eguale alla differenza dei raggi.*

Sia il settore annulare $ABB'A'$ (fig. 194) determinato dai due raggi OA , OB in due cerchi concentrici. Condotta da A la perpendicolare ad OA e preso su questa il segmento AC equivalente all'arco $\widehat{AB}$, si unisca O con C , e da A' si conduca la $A'C'$ parallela alla AC . Intanto dico che $A'C'$ equivale all'arco $\widehat{A'B'}$. Infatti gli archi $\widehat{AB}$, $\widehat{A'B'}$ essendo simili (n. 336, 3.^o), si ha

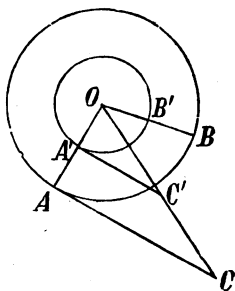


Fig. 194.

$$\widehat{AB} : \widehat{A'B'} = OA : OA'$$

d'altra parte dai triangoli simili OAC , $OA'C'$ si ha

$$AC : A'C' = OA : OA'$$

dalle due proporzioni si deduce

$$\widehat{AB} : \widehat{A'B'} = AC : A'C'$$

ma $\widehat{AB} = AC$, dunque $\widehat{A'B'} = A'C'$.

Ora il settore OAB equivale al triangolo OAC (340, Cor.), ed il settore $OA'B'$ equivale al triangolo $OA'C'$; perciò la differenza dei settori, cioè il settore annulare $ABB'A'$ equivale alla differenza dei triangoli, cioè al trapezio $ACC'A'$.

In particolare poi:

L'anello circolare equivale al trapezio che ha le

basi equivalenti alla circonferenza e l'altezza alla differenza dei raggi.

OSSERVAZIONE. Le circonferenze, i cerchi e le loro parti sono grandezze di terza specie (n. 229); per esse l'equivalenza non si può ridurre alla decomposizione nello stesso numero di parti eguali, ciascuna a ciascuna. Ma per i concetti di equivalenza, di somma, di differenza, conviene riferirsi a quanto si è esposto ai n. 269 e seguenti.

382. LUNGHEZZA DELLA CIRCONFERENZA. Il rapporto costante di una circonferenza al suo diametro è un numero incommensurabile e lo si indica colla lettera π : si ha dunque

$$\frac{C}{2r} = \pi, \quad \text{da cui} \quad C = 2\pi r$$

formola che dà la lunghezza della circonferenza noto il raggio e reciprocamente.

Diremo in appresso come si calcoli questo numero: ordinariamente si usa il valore 3,1416 approssimato per eccesso a meno di $\frac{1}{10^4}$.

383. LUNGHEZZA DI UN ARCO. Si può trovare la lunghezza di un arco, quando sia nota l'ampiezza ed il raggio, oppure data la lunghezza si può trovare l'ampiezza: così indicando con l la lunghezza di un arco, n la sua ampiezza (in gradi, minuti ecc...), si ha (n. 285)

$$l : 2\pi r = n : 360$$

da cui nel primo caso

$$l = \frac{\pi r n}{180},$$

e nel secondo

$$n = \frac{180l}{\pi r}.$$

384. Occorrendo di dover introdurre in una formola la misura di un angolo, vi si sostituisce quella dell'arco compreso descritto col centro nel vertice (n. 275, 1.^o): ma invece dell'ampiezza (che non si presta per i calcoli non avendo relazione colle misure lineari) si prende *la lunghezza dell'arco misurato col raggio*.

Sia $\widehat{AOB}$ un angolo qualunque (fig. 194); centro in O e con raggi successivamente OA , OA' si descrivano gli archi $\widehat{AB}$, $\widehat{A'B'}$,... compresi nell'angolo, che saranno simili; perciò dette l , l' ,... le lunghezze di detti archi ed r , r' ,... i raggi corrispondenti si ha (n. 379, Cor. 1.^o, 289)

$$l : r = l' : r'.$$

Questo rapporto costante si assume come misura dell'angolo $\widehat{AOB}$.

Se si pone $r = 1$ la misura dell'angolo è l , per cui si può anche dire che:

La misura di un angolo è la lunghezza dell'arco compreso descritto con raggio eguale all'unità lineare.

Così un giro è rappresentato da 2π , un angolo piatto da π , un angolo retto da $\frac{\pi}{2}$, ed in generale la misura lineare di un angolo di n° da

$$l = \frac{n}{360} 2\pi = \frac{n\pi}{180}.$$

Reciprocamente, se l è la misura lineare di un angolo, la sua misura in gradi sarà

$$n = \frac{180l}{\pi}.$$

Queste due formole in sostanza rientrano in quelle trovate più sopra per gli archi, ove si ponga $r = 1$.

In questo caso l'angolo unità non è più l'angolo retto, ma l'angolo che comprende l'arco la cui lunghezza è eguale al raggio: la sua ampiezza si avrà ponendo nell'ultima formula $l = 1$, cioè

$$n = \frac{\pi}{180} \text{ e fatto il calcolo}$$

$$n = 57^{\circ}. 17'. 24'', 80...$$

385. AREA DEL CERCHIO. Dal teor. 380 indicando con A l'area del cerchio si ha

$$A = \frac{1}{2} Cr$$

e ponendo $2\pi r$ in luogo di C e riducendo

$$A = \pi r^2$$

formola che dà l'area del cerchio in funzione del raggio e reciprocamente.

OSSERVAZIONE. Dalla stessa formola si deduce ancora che:

Il rapporto del cerchio al quadrato del raggio è eguale a quello della circonferenza al diametro.

386. AREA DEL SETTORE CIRCOLARE, DELL'ANNU-LARE E DELL'ANELLO. Pel settore circolare dal Cor. del n. 380 indicando con l la lunghezza dell'arco si ha

$$\text{area settore} = \frac{lr}{2}.$$

Se invece è data l'ampiezza n° dell'arco si ha

$$\text{area settore} : \text{area cerchio} = n : 360$$

da cui

$$\text{area settore} = \frac{n}{360} \pi r^2.$$

Pel settore annulare dal teorema al n. 381 se l ed l' sono le lunghezze dei due archi ed r , r' quelle dei raggi si ha

$$\text{area sett. ann.} = \frac{l + l'}{2} (r - r').$$

Se poi è data l'ampiezza n° comune ai due archi, si ha

$$\text{area sett. ann.} = \frac{n}{360} \pi (r^2 - r'^2).$$

In particolare per l'anello circolare si ha

$$\text{area anello} = \pi (r + r') (r - r')$$

ossia

$$\text{area anello} = \pi (r^2 - r'^2).$$

387. AREA DEL SEGMENTO. L'area del segmento ad una base è la differenza fra le aree del settore e del triangolo che risultano unendo il centro del cerchio cogli estremi dell'arco, quando il segmento stesso è minore del semicerchio; se poi è maggiore del semicerchio, è la somma delle stesse aree ⁽¹⁾.

Se il segmento è a due basi, si trova l'area considerandolo come differenza di due segmenti ad una base.

⁽¹⁾ Si fa osservare però che colle nozioni date fino a questo punto non si possono calcolare che le aree di quei segmenti, dei quali le corde sono lati di poligoni regolari. In tal caso detta l_n la corda, lato del poligono di n lati, e s_n l'area del poligono stesso, l'area del segmento è data da

$$\frac{1}{n} (\pi r^2 - s_n) \quad \text{oppure} \quad \frac{n-1}{n} (\pi r^2 - s_n)$$

secondo che si considera il segmento minore oppure maggiore del semicerchio.

§ 12.º Calcolo del numero π .

388. Archimede ⁽¹⁾ fu il primo ad occuparsi del calcolo di π e, considerando i perimetri dei poligoni regolari circoscritti ed iscritti fino a 96 lati, trovò che questo numero è compreso fra $3 + \frac{10}{70}$

e $3 + \frac{10}{71}$. Il primo valore, eguale a $\frac{22}{7}$, è appros-

simato per eccesso ed esatto fino ai centesimi. Con maggior approssimazione fu calcolato poi da Apollonio e da Filone tra gli antichi; assai più tardi da Vieta (1540-1603), dai geometri olandesi Ludolph van Ceulen ed Adriano Mezio (contemporanei del 16º e del 17º secolo); quest'ultimo ne diede il valore $\frac{355}{113}$

approssimato per eccesso ed esatto fino ai milionesimi. Ultimamente poi da parecchi geometri il π fu calcolato perfino con 500 e più cifre decimali. Il valore di π colle prime 10 cifre decimali è

$$\pi = 3, 1415926535....$$

(1) Celebre geometra e fisico siracusano, vissuto dal 287 al 212 a. C. Le sue opere sulle spirali, sulla quadratura della parabola, sull'area e sulla cubatura della sfera e del cilindro, sulla cubatura dei conoidi e sferoidi (solidi generati da una conica rotante intorno ad un suo asse) ecc. dove per la prima volta appare il concetto di grandezza limite, possono considerarsi come il fondamento della *geometria della misura* (come le opere di Apollonio lo sono della *geometria di posizione*). Sebbene la quadratura del circolo e la cubatura della piramide fossero già state date da Eudosso, discepolo di Platone, rimane pur sempre a lui il merito di aver mostrato il nesso della prima di dette questioni colla rettificazione della circonferenza.

Questo numero, come si è detto, non è calcolabile esattamente ⁽¹⁾; vi sono però alcuni metodi per trovarlo con tutta l'approssimazione desiderabile. Uno di essi è il seguente.

389. Le formole date ai n. 372 e 373 mostrano la possibilità di calcolare in funzione del raggio i perimetri dei poligoni regolari circoscritti ed iscritti ad un cerchio, dove il numero dei lati vada raddoppiando indefinitamente. I rapporti di questi perimetri al diametro del cerchio sono altrettanti valori di π approssimati per eccesso o per difetto secondo che trattasi dei poligoni circoscritti o degli iscritti, e l'approssimazione va crescendo al raddoppiare del numero dei lati.

Ora, a rendere più spedito il calcolo, vi è per questi perimetri una legge di successione espressa dal seguente

390. TEOREMA. *Se si indicano con $\frac{1}{P_n}, \frac{1}{p_n}, \frac{1}{P_{2n}}, \frac{1}{p_{2n}}, \dots$ i reciproci dei perimetri dei poligoni circoscritti ed iscritti ad un cerchio, dove il numero dei lati vada raddoppiando indefinitamente, i successivi termini di questa successione a partire dal terzo si ottengono formando alternativamente la media aritmetica e la media geometrica dei due precedenti.*

Dico cioè che

$$\frac{1}{P_{2n}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{P_n} + \frac{1}{p_n} \right), \quad \frac{1}{p_{2n}} = \sqrt{\frac{1}{p_n} \cdot \frac{1}{P_n}}$$

⁽¹⁾ Lambert (1761) dimostrò che il π è incommensurabile; più tardi Legendre provò che lo stesso è del quadrato di π . Infine il Lindemann (1882) ed altri dimostrarono l'impossibilità di rettificare la circonferenza (e quindi di quadrare il cerchio).

Infatti dalle formole dei n. 372 e 373, si ha

$$\frac{1}{L_n} + \frac{1}{l_n} = \frac{\sqrt{4r^2 - l_n^2}}{2rl_n} + \frac{1}{l_n} = \frac{\sqrt{4r^2 - l_n^2} + 2r}{2rl_n}$$

ossia (tenuto conto della formola n. 374)

$$\frac{1}{L_n} + \frac{1}{l_n} = \frac{1}{L_{2n}} \quad (1)$$

D'altra parte dalla

$$L_{2n} = \frac{2r(2r - \sqrt{4r^2 - l_n^2})}{l_n}$$

ricordando che

$$l_{2n} = r(2r - \sqrt{4r^2 - l_n^2})$$

si ottiene

$$L_{2n} = \frac{2l_{2n}}{l_n}, \quad \text{da cui} \quad \frac{1}{l_{2n}} = \sqrt{2 \frac{1}{l_n} \cdot \frac{1}{L_{2n}}} \quad (2)$$

Si moltiplichino i denominatori delle (1) e (2) per $2n$: ricordando che

$$nl_n = p_n, \quad nL_n = P_n, \quad 2nl_{2n} = p_{2n}, \quad 2nL_{2n} = P_{2n}$$

e sostituendo, le (1) e (2) diventano appunto

$$\frac{1}{P_{2n}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{P_n} + \frac{1}{p_n} \right), \quad \frac{1}{p_{2n}} = \sqrt{\frac{1}{p_{2n}} \cdot \frac{1}{P_{2n}}}$$

391. Ora se C è la circonferenza data, le due serie $P_n, P_{2n}, \dots$ e p_n, p_{2n} hanno per limite C ; perciò anche le due serie $\frac{1}{p_n}, \frac{1}{p_{2n}}, \dots$ e $\frac{1}{P_n}, \frac{1}{P_{2n}}$ sono convergenti ed hanno per limite $\frac{1}{C}$. Queste due serie si ottengono considerando i termini di posto pari

e quelli di posto dispari nella successione indicata nel teorema.

392. Dalla formola $C = 2\pi r$, se si pone $2r = 1$, cioè se si considera la circonferenza il cui diametro è uguale all'unità lineare, si ha $C = \pi$ ed anche $\frac{1}{C} = \frac{1}{\pi}$, perciò in tal caso le due serie $\frac{1}{p_n}, \frac{1}{p_{2n}} \dots$ e $\frac{1}{P_n}, \frac{1}{P_{2n}} \dots$ tendono a $\frac{1}{\pi}$.

Così partendo dai quadrati, per $2r = 1$ si ha

$$\frac{1}{P_1} = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{p_1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

perciò

$$\frac{1}{P_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \right) = \frac{1 + \sqrt{2}}{8}$$

$$\frac{1}{p_2} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1 + \sqrt{2}}{8}} = \frac{\sqrt{2(2 + \sqrt{2})}}{8} \dots$$

si hanno dunque le due serie convergenti

$$\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2(2 + \sqrt{2})}}{8}, \dots \quad \text{e} \quad \frac{1}{4}, \frac{1 + \sqrt{2}}{8}, \dots$$

393. Infine, poichè $\frac{1}{4}$ si può considerare come la media aritmetica di 0 e $\frac{1}{2}$, e $\frac{\sqrt{2}}{4}$ come la media geometrica di $\frac{1}{2}$ ed $\frac{1}{4}$, si può dire che:

Se a partire dai numeri 0 e $\frac{1}{2}$ si formano alternativamente la media aritmetica e la geometrica degli ultimî due numeri ottenuti, si ha una successione di numeri tali che i termini di posto pari e

quelli di posto dispari costituiscono due serie convergenti che hanno per limite $\frac{1}{\pi}$ (¹).

La teoria delle approssimazioni numeriche insegna fin dove si deve spingere il calcolo per avere il π con una data approssimazione, e dà alcune regole per renderne più spedito il calcolo stesso.

(¹) Questo teorema è noto sotto il nome di *regola di Schwab*.

PARTE SECONDA

STEREOMETRIA

CAPITOLO I

RETTE E PIANI PERPENDICOLARI E PARALLELI ANGOLI DIEDRI E POLIEDRI

§ 1.º Determinazione e genesi del piano.

394. Passiamo ora allo studio delle figure *solide*, di quelle figure cioè che non hanno tutti i loro elementi nello stesso piano.

Al n. 29 si è ammesso esistere una superficie, detta il *piano che contiene tutte le rette che hanno con essa comuni due punti*.

Ne risulta il

COROLLARIO. *Una retta ed un piano, che non la contenga, non possono avere comune che un solo punto.*

Si dice che la retta ed il piano in quel punto *s'incontrano*, esprimendo con ciò, che un punto mobile sulla retta, oltrepassando quel punto, va da una banda all'altra del piano.

395. Si è dimostrato al n. 30 che: *un piano è determinato in modo unico da tre punti non in linea retta.*

Si deduce:

COR.^o 1.^o *Per due punti passano infiniti piani.*

Infatti sieno A e B i due punti: preso un terzo punto C (fuori della AB), i punti A, B, C determinano un piano; preso un altro punto D (fuori del piano ABC) i punti A, B, D determinano un altro piano e così via ⁽¹⁾.

Tutti questi piani hanno in comune la retta AB.

Si dice che questi piani costituiscono un *fascio*, di cui la retta AB è l'*asse*.

COR. 2.^o *Per un punto passano infiniti piani.*

Infatti sia A il punto dato: preso un punto B, per i punti A, B passano infiniti piani (Cor. 1.^o); preso un punto C fuori della retta AB, per AC passano infiniti piani distinti dai primi, salvo il piano ABC: e così via.

Tutti i piani che hanno comune un punto si dice che formano una *stella* di piani, di cui questo punto è il *centro*. Questi piani a due a due hanno in comune una retta, cioè:

396. TEOREMA. *Due piani che hanno comune un punto, hanno necessariamente comune anche una retta passante per quel punto.*

I due piani P e Q (fig. 195) abbiano in comune il punto A: nel piano P si conducano per A due

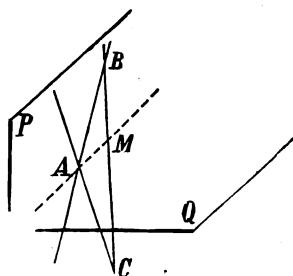


Fig. 195.

(¹) L'intuizione ci avverte che, per quanti piani si concepiscano man mano procedendo in tal modo, si può sempre pensare ad un punto non appartenente a nessuno dei piani già concepiti.

contreranno in A il piano Q): si prendano due punti B e C uno su ciascuna, ma da bande opposte del piano Q, il che è possibile (n. 39, Cor.) e si conduca la BC, che incontrerà necessariamente il piano Q in un punto M; questo sarà comune ai due piani, i quali, per avere in comune anche il punto A, avranno comune la AM. È chiaro poi che nessun altro punto appartiene ai due piani.

Due piani distinti che hanno una retta in comune si dice che *si incontrano* o *si intersecano* secondo quella retta; volendo significare che ciascuno dei due è diviso da quella retta in due falde situate da bande opposte rispetto all'altro piano.

I piani di una stella a due a due si intersecano secondo una retta: queste rette (che passano tutte pel centro della stella di piani) si dice che costituiscono una *stella di raggi* di cui il punto comune è il *centro*.

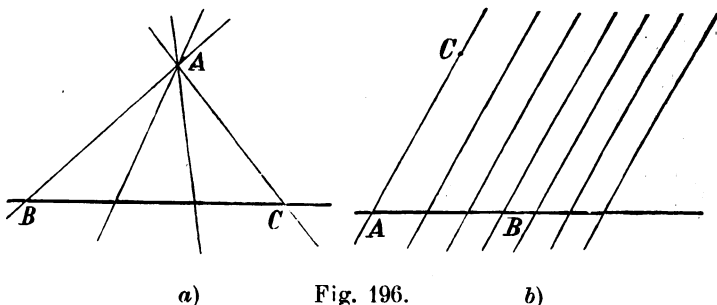


Fig. 196.

397. Il piano determinato da tre punti A, B, C non in linea retta si può supporre generato dalla CA che o ruoti intorno ad A appoggiandosi alla BC (fig. 196 a), o si muova parallelamente a sè stessa ed appoggiandosi alla AB (fig. 196 b).

398. Ma un piano può essere generato anche in altro modo, come si può dedurre dal seguente

TEOREMA. *Tutte le perpendicolari ad una retta in uno de' suoi punti giacciono in un piano.*

Sia AA' una retta (fig. 197) ed O un punto dato su di essa. Anzitutto si intuisce che nello spazio esistono infinite perpendicolari ad AA' nel punto O , e cioè ve n'è una in ciascuno dei piani costituenti il fascio di cui AA' è l'asse. Prese ora due qualunque OB , OC di queste perpendicolari alla AA'

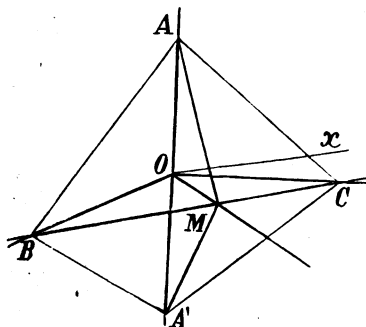


Fig. 197.

in O (sufficienti a determinare un piano (n. 31, Cor. 1.^o), dico che il piano BOC contiene tutte le dette perpendicolari.

Infatti si prendano sulla AA' a partire da O due segmenti uguali OA , OA' e si congiungano i punti A ed A'

con B e con C . La OB essendo perpendicolare al segmento AA' nel punto medio O , è il luogo dei punti equidistanti da A e da A' nel piano ABA' (n. 126), perciò $AB = A'B$: per la stessa ragione $AC = A'C$. Si unisca B con C : i triangoli ABC , $A'BC$ sono eguali per avere BC comune, $AB = A'B$ e $AC = A'C$; perciò se si fa rotare uno di essi ad es. $A'BC$ intorno alla BC , si può ridurre il punto A' a coincidere con A . Se si congiunge ora un punto qualunque M della retta BC con A e con A' , è chiaro che i segmenti MA , MA' mediante la predetta rotazione si possono ridurre a coincidere, ossia

sono eguali. Dopo ciò se nel triangolo isoscele AMA' si unisce il vertice M con O punto medio della base AA' , la MO è perpendicolare (n. 112, 2.º) ad AA' . Così dicasi per ogni altra retta condotta da O nel piano BOC ⁽¹⁾.

Una retta OX poi che sia fuori del piano BOC non può essere perpendicolare ad AA' . Infatti il piano AXA' interseca il piano BOC secondo una retta; sia la OM : questa, per essere nel piano BOC , è perpendicolare ad AA' ; dunque non lo è la OX situata nel medesimo piano.

OSSERVAZIONE. Da questo teorema risulta evidente che:

Se un angolo retto rota intorno ad un lato, l'altro lato genera un piano.

399. È opportuno fin da questo punto estendere allo spazio la definizione di luogo data nel piano (n. 128).

Quando tutti i punti di una superficie (o di un insieme di superficie), ed essi soli, hanno una certa proprietà, si dice che quella superficie (o insieme di superficie) è il *luogo* dei punti aventi la detta proprietà.

Così pure quando tutte le linee disposte in un certo modo sopra una superficie, ed esse sole, hanno una certa proprietà, diremo che la superficie è il *luogo* delle linee aventi quella proprietà.

Ad es. il teorema precedente può essere enunciato nel seguente modo:

⁽¹⁾ Veramente fa eccezione la parallela alla BC , ma poichè la BC è presa arbitrariamente nel primo BOC , unendo con B un altro punto della OC si ha una retta che incontra la parallela alla BC , e colla quale si può ripetere la dimostrazione.

Il luogo delle perpendicolari ad una retta in uno dei suoi punti è un piano.

§ 2.° Rette e piani perpendicolari.

400. Si dice che una retta è *perpendicolare ad un piano* in un punto, se è perpendicolare a tutte le rette del piano che passano per quel punto. Questo si chiama talvolta il *pie* della perpendicolare.

Se n'è avuto un esempio nel teor. 398 che può essere enunciato nel modo seguente:

TEOREMA. *Se una retta è perpendicolare a due rette di un piano nel loro punto comune, essa è perpendicolare al piano in quel punto.*

COROLLARIO. *Se una retta è perpendicolare ad un piano, le perpendicolari alla retta condotte dai punti del piano, giacciono nel piano stesso.*

Infatti (fig. 197) se AA' è perpendicolare al piano BOC in O ; se la perpendicolare alla AA' condotta da un punto M del piano BOC non fosse nel piano stesso, incontrerebbe la AA' in un punto diverso da O ; ed allora per M passerebbero due perpendicolari alla AA' , cioè la MO e quest'altra, il che non può essere.

Una retta che non è perpendicolare ad un piano e la incontra si dice *obliqua al piano*.

401. Ne consegue

TEOREMA. *Per un punto dato si può far passare un piano perpendicolare ad una retta data ed uno solo.*

Convieni distinguere due casi: o il punto è sulla retta o fuori della retta.

1.° Sia AB (fig. 198) la retta data e C il punto su di essa : s'immagini condotta per C una perpendicolare ad AB ⁽¹⁾ e sia la CD, indi si faccia rotare la figura intorno ad AB: per quanto si sa (n. 398, Oss.) la CD genera un piano perpendicolare ad AB.

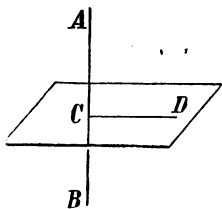


Fig. 198.

2.° Se AB è la retta data e D il punto esterno ad essa, si conduca da D la DC perpendicolare ad AB e si operi come nel caso precedente.

In entrambi i casi poi il piano è unico. Infatti

1.° Un piano passante per C e perpendicolare alla AB in C dovendo contenere le perpendicolari alla AB in C coincide col primo.

2.° Un piano passante per D e perpendicolare alla AB deve contenere la DC (n. 400, Cor.) e perciò incontra la AB in C. Ma per C passa un solo piano perpendicolare ad AB.

402. TEOREMA. *Se una retta è perpendicolare ad un piano e dal suo piede si conduce la perpendicolare ad una retta del piano, quest'ultima è perpendicolare al piano delle prime due ⁽²⁾.*

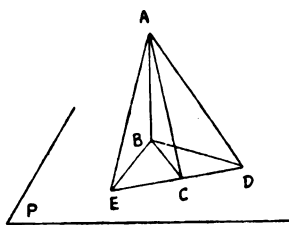


Fig. 199.

Sia AB (fig. 199) una retta perpendicolare al piano P e dal piede B sia condotta la BC perpendicolare alla retta DE del piano P: dico che

(1) Per far questo s'immagini un piano passante per AB ed in esso piano si tracci la perpendicolare ad AB nel punto C.

(2) Questo teorema si usa talvolta chiamarlo il *teorema delle tre perpendicolari*.

DE è perpendicolare al piano ABC. Basta provare che DE è perpendicolare alla retta che unisce C con un punto qualunque della AB. Perciò presi sulla DE i segmenti CD, CE eguali, si uniscano D ed E con B e con A. È chiaro che $BE = BD$ (n. 130); che $AE = AD$ per l'egualianza dei triangoli ABE, ABD (n. 106, Cor.); perciò nel triangolo AED, che è isoscele, la mediana AC è perpendicolare alla ED.

403. TEOREMA. *Un piano perpendicolare ad una retta è perpendicolare alle parallele alla retta.*

Se AB ed EF (fig. 200) sono due parallele e

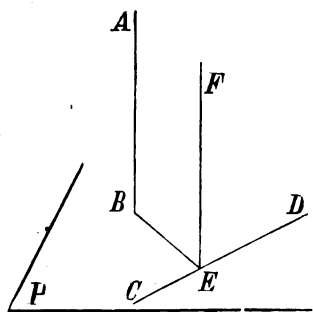


Fig. 200.

se il piano P è perpendicolare alla AB, dico che lo è anche alla EF. Infatti se BE è l'intersezione del piano P con quello delle due parallele, e da E si conduce sul piano P la CD perpendicolare a BE, questa CD è perpendicolare al piano ABE, cioè al piano delle

due parallele; e perciò anche alla EF.

404. TEOREMA. *Per un punto dato si può far passare una retta perpendicolare ad un piano dato ed una sola.*

Convieni distinguere due casi: o il punto è sul piano o fuori del piano.

1.° Sia P il piano (fig. 201 a) ed A un punto del piano stesso. Si costruisca a parte un piano P' perpendicolare ad una retta A'B' in A' (n. 401); indi si trasporti la figura fino a far coincidere P'

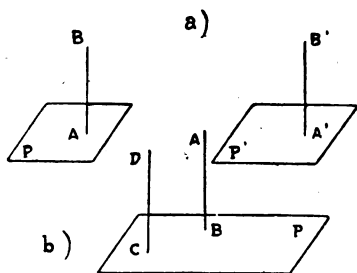


Fig. 201.

esterno ad esso. Da un punto C del piano si immagini la CD perpendicolare al piano (1.º caso): la parallela AB alla CD condotta per A è perpendicolare al piano P (n. 403).

In entrambi i casi poi la perpendicolare è unica, perchè se ve ne fosse un'altra, il piano delle due rette incontrerebbe il piano P secondo una retta perpendicolare ad entrambe, il che non può essere.

§ 3.º Rette e piani paralleli.

405. Una retta ed un piano si dicono *paralleli*, quando non hanno alcun punto in comune. Per es.

TEOREMA. *Una retta AB ed un piano P (fig. 202) perpendicolari ad una stessa retta AC in due punti distinti A e C sono paralleli.*

Infatti se la AB incontrasse il piano P in un punto M, il triangolo MAC avrebbe i due angoli in $\widehat{A}$ ed in $\widehat{C}$ retti, il che è impossibile.

406. **TEOREMA.** *Se una retta è parallela ad un piano, la parallela alla retta, condotta per un punto del piano, giace nel piano stesso.*

Sia la AB (fig. 202) parallela al piano P, e C un punto del piano. S'immagini il piano ABC e

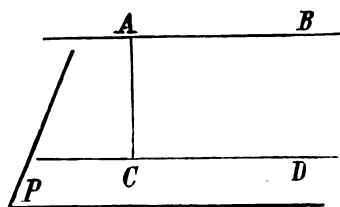


Fig. 202.

sia CD la sua intersezione col piano P : la CD è parallela alla AB . Infatti le due rette giacciono nello stesso piano ABC ; d'altra parte AB non può incontrare la CD ,

perchè incontrerebbe il piano P (sul quale sta la CD), il che non può essere; dunque la CD è parallela alla AB . E poichè nessun'altra retta condotta per C è parallela alla AB , se ne conclude che la parallela alla AB condotta per C giace sul piano P .

Ciò prova ancora che *il piano P è il luogo delle parallele alla AB condotte per i punti del piano stesso.*

407. TEOREMA. *Se una retta è parallela ad una retta di un piano, o giace sul piano, od è parallela al piano.*

Sia la AB (fig. 202) parallela alla retta CD del piano P . Se il piano delle due parallele coincide col piano P , la AB giace sul detto piano. Se non coincide, allora i due piani s'incontrano secondo la CD ; in questo caso se la AB incontrasse il piano P , ciò avverrebbe in un punto della CD , il che non può essere per ipotesi: dunque la AB è parallela al piano P .

Si deduce:

408. TEOREMA. *Da un punto dato si possono condurre infinite parallele ad un piano dato.*

Queste sono le parallele alle rette del piano condotte per quel punto, e quelle sole (n. 407).

409. TEOREMA. *Da un punto dato si possono condurre infiniti piani paralleli ad una retta data.*

Questi sono i piani passanti per la parallela alla retta data condotta per quel punto, ed essi soli (n. 406) (ad eccezione del piano delle due parallele).

410. TEOREMA. *Due rette perpendicolari allo stesso piano sono parallele.* (Reciproco del Teorema 403).

Sieno AB , CD due rette perpendicolari al piano P (fig. 203) in B ed in D ; dico che sono parallele. Infatti il piano P , essendo perpendicolare alla AB , dev'essere perpendicolare alla parallela alla AB passante per D . Ma la DC è perpendicolare al piano P , ed è unica (n. 404); dunque la

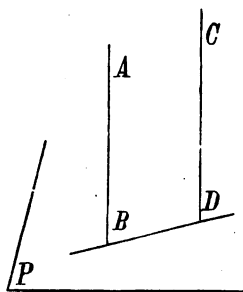


Fig. 203.

DC è appunto la parallela alla AB che passa per D .

411. TEOREMA. *Due rette parallele ad una terza sono parallele tra loro.*

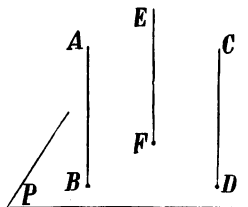


Fig. 204.

Le due rette AB , CD (fig. 204) sieno parallele alla EF ; dico che sono parallele fra loro. Infatti se si immagina un piano P perpendicolare alla EF , questo lo sarà anche alle AB e CD (n. 403); perciò le AB e CD perpendicolari ad uno stesso piano sono parallele (n. 410).

412. TEOREMA. *Se due piani BAC , BAD (fig. 205) passano per due parallele DE , CF e s' incontrano, la loro intersezione AB è parallela alle prime due rette.*

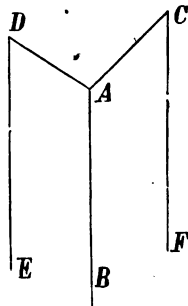


Fig. 205.

Infatti la DE è parallela al piano ACF (n. 407), perciò non può incontrare la AB che giace in questo piano. D'altra parte DE ed AB sono nello stesso piano DAB , dunque sono parallele. Similmente si dimostra che CF è parallela alla AB .

§ 4.º Angoli diedri.

413. Due mezzi piani o falde CAB , DAB (figura 206) uscenti da una stessa retta AB decompongono lo spazio in due parti, che si dicono *diedri*. Le due falde sono le *facce* e la retta AB lo *spigolo* o la *costola* sì dell'uno che dell'altro diedro. Le altre due falde BAC' , BAD' che completano i due piani, si dicono i *prolungamenti* delle facce e cadono in generale in uno dei due diedri in cui è diviso lo spazio: questo diedro dicesi *concavo* ed il primo *convesso*.

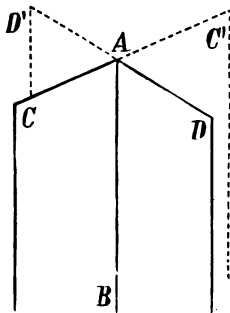


Fig. 206.

Può avvenire che le due facce di un diedro sieno i prolungamenti l'una dell'altra, cioè che costituiscano un unico piano, come ad esempio BAC e BAC' ; allora i due diedri in cui rimane diviso lo spazio si dicono *piatti*.

TEOREMA. *I diedri piatti sono eguali.*

414. Un diedro si enuncia leggendo successivamente un punto di una faccia, lo spigolo (di cui si leggono due punti) e un punto dell'altra faccia, ed aggiungendo l'aggettivo convesso o concavo o piatto: siccome però si considerano per lo più diedri convessi, questo aggettivo si sottintende. Così i due

mezzi piani BAC, BAD dividono lo spazio nel diedro CABD (o DABC) convesso; e nel diedro CABD (o DABC) concavo. Talvolta, quando non possa nascer dubbio si legge il solo spigolo, dicendo per es. il diedro AB.

Il diedro CABD si scrive $\overline{\text{CABD}}$.

415. Un diedro si può supporre generato da una delle due facce che ruoti intorno allo spigolo fino a coincidere coll'altra (n. 11, 3.º e 14). La rotazione può avvenire in due sensi opposti. Così nella fig. 206 la faccia CAB rotando in un senso fino a coincidere con DAB genera il diedro convesso $\overline{\text{CABD}}$ e rotando in senso opposto il diedro concavo $\overline{\text{CABD}}$.

416. Due diedri si dicono *adiacenti*, se disposti collo spigolo ed una faccia in comune e da bande opposte di questa faccia, come ad esempio i diedri $\overline{\text{CABD}}$, $\overline{\text{DABE}}$ (fig. 207): il diedro $\overline{\text{CABE}}$ si dice la *somma* dei due diedri $\overline{\text{CABD}}$, $\overline{\text{DABE}}$, e si scrive

$$\overline{\text{CABE}} = \overline{\text{CABD}} + \overline{\text{DABE}}$$

417. *Fare l'addizione* di due diedri, vuol dire trovare la loro somma; se di più diedri, vuol dire trovare la somma dei primi due, poi della somma trovata e del terzo e così di seguito fino all'ultimo.

Le definizioni di multiplo e summultiplo date pei segmenti (n. 40) e per gli angoli valgono anche pei diedri.

418. *Fare la sottrazione* di due diedri vuol dire sovrapporli l'uno all'altro in modo

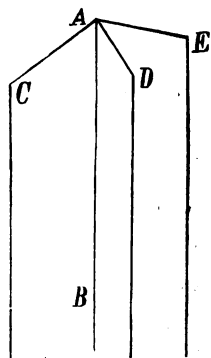


Fig. 207,

che abbiano in comune lo spigolo ed una faccia, come ad es. i diedri $\overline{CABE}$, $\overline{CABD}$ (fig. 207) che hanno lo spigolo AB e la faccia CAB in comune. Se, come in questo caso, le altre due facce DAB, EAB non coincidono i due diedri sono diseguali; il diedro $\overline{CABD}$ interno all'altro è il *minore* dei due, $\overline{CABE}$ il *maggiore*, e si scrive:

$$\overline{CABD} < \overline{CABE} \quad \text{o} \quad \overline{CABE} > \overline{CABD}$$

ed il diedro $\overline{DABE}$ dicesi *differenza* fra i due diedri $\overline{CABE}$ e $\overline{CABD}$, e si scrive:

$$\overline{DABE} = \overline{CABE} - \overline{CABD}.$$

Si ha pure

$$\overline{CABD} = \overline{CABE} - \overline{DABE}$$

e

$$\overline{CABE} = \overline{CABD} + \overline{DABE}.$$

Ma se anche le altre facce coincidono, i due diedri coincidono e sono eguali.

In questo caso si dice che la differenza è *nulla*, intendendo per *diedro nullo*, quello le cui facce coincidono (ed i prolungamenti sono esterni).

419. Si ammette (come si è fatto per i segmenti e per gli angoli) che la coincidenza di due diedri eguali si possa ottenere anche capovolgendo uno di essi.

In altre parole, se sovrapponendo i due diedri $\overline{CABD}$, $\overline{C'A'B'D'}$, (fig. 208) in modo che $C'A'B'$ coincida con CAB

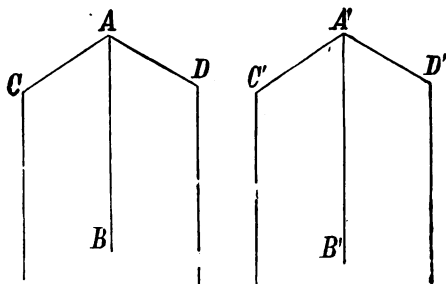


Fig. 208.

anche $D'A'B'$ coincide con DAB , ponendo invece $D'A'B'$ sopra CAB si potrà fare in modo che $C'A'B'$ cada su DAB .

I diedri sono grandezze della prima specie.

420. Lo studio dei diedri presenta una perfetta analogia collo studio degli angoli, tanto che basta sostituire alle parole *vertice*, *lato*, le parole *spigolo*, *faccia* per passare da definizioni e teoremi sugli angoli a definizioni e teoremi analoghi sui diedri. Tale analogia fin d'ora avvertita, apparirà meglio da ciò che segue.

421. Sia $CABD$ un diedro (fig. 209); se da un punto M dello spigolo AB si conducono nelle due facce le ML , MN perpendicolari allo spigolo e si fa rotare la faccia CAB intorno allo spigolo AB fino a coincidere coll'altra faccia DAB , essa genera il diedro $CABD$, e la ML ruota intorno ad M e genera l'angolo $\widehat{LMN}$ (n. 398. Osserv.).

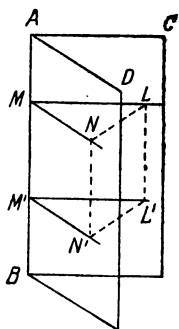


Fig. 209.

Lo stesso dicasi di un altro angolo $\widehat{L'M'N'}$ determinato nello stesso modo del primo. Ora questi angoli sono eguali. Infatti presi sui lati giacenti sulla stessa faccia segmenti eguali, cioè $ML = M'L'$, $MN = M'N'$ e congiunti i quattro punti N , N' , L' , L nell'ordine indicato, è chiaro che i quadrilateri $MNN'M'$ e $MLL'M'$ sono parallelogrammi (n. 119); d'onde i segmenti LL' ed NN' sono eguali e paralleli, perchè eguali e paralleli ad MM' (n. 441). Allora anche il quadrilatero $LNN'L'$ è parallelogrammo, ed $LN = L'N'$. Infine i triangoli LMN , $L'M'N'$ hanno i lati rispettivamente eguali, perciò $\widehat{LMN} = \widehat{L'M'N'}$.

Uno di questi angoli si dice *l'angolo corrispondente al diedro*; si dice anche la *sezione retta* o *normale* del diedro, perchè si può ottenere tagliando il diedro con un piano perpendicolare allo spigolo.

Si deduce che se un diedro si muove in modo che una sua faccia scorra su sè stessa strisciando lungo lo spigolo, anche l'altra necessariamente fa lo stesso, perchè una sezione retta va a coincidere successivamente colle altre: cioè *il diedro scorre su sè stesso*.

422. Si deduce ancora che per *costruire un diedro eguale ad un diedro dato* $\overline{AB}$ (fig. 210, data una faccia e lo spigolo $A'B'$, si costruisca la sezione retta DCE del diedro $\overline{AB}$. Di poi per un punto C' della

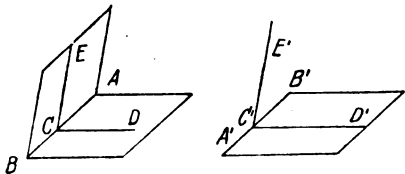


Fig. 210.

$A'B'$ si conduca la $D'C'$ perpendicolare ad $A'B'$ nella faccia data, e fatto rotare la $D'C'$ intorno ad $A'B'$, si costruisca nel piano generato nell'anzidetta rotazione l'angolo $\widehat{D'C'E'} = \widehat{DCE}$; la falda $A'B'E'$ è la seconda faccia del diedro cercato.

Il problema ammette due soluzioni (da bande opposte della faccia data).

433. Tra i diedri e i loro angoli vi è una perfetta corrispondenza di posizione e di estensione. A diedri adiacenti corrispondono angoli adiacenti; a diedri eguali corrispondono angoli eguali e reciprocamente (si verifica per sovrapposizione): al diedro somma di altri due corrisponde l'angolo somma degli angoli corrispondenti, al diedro differenza l'angolo differenza, al diedro multiplo o summultiplo

di un altro l'angolo equimultiplo o equisummultiplo dell'altro ecc....

In una parola riassumendo:

TEOREMA. *I diedri sono proporzionali ai loro angoli* (n. 283 e 284).

424. In seguito a tale corrispondenza:

1.° Si dicono *retti* i diedri a cui corrispondono angoli retti, perciò

TEOREMA. *I diedri retti sono eguali.*

2.° Si dicono *supplementari* o *complementari* due diedri a cui corrispondono rispettivamente angoli supplementari o complementari, perciò

TEOREMA. *Due diedri supplementari hanno per somma un diedro piatto o due diedri retti.*

TEOREMA. *Due diedri complementari hanno per somma un diedro retto.*

COROLLARIO. *I diedri supplementari o complementari di diedri eguali sono eguali.*

3.° Due diedri si dicono *opposti allo spigolo*, se le facce dell'uno sono i prolungamenti di quelle dell'altro. A diedri opposti allo spigolo corrispondono angoli opposti al vertice, e poichè questi sono eguali, si ha il

TEOREMA. *I diedri opposti allo spigolo sono eguali.*

425. MISURA DEI DIEDRI. Se si assume come unità di misura dei diedri il diedro retto e lo si immagina diviso nello stesso modo che l'angolo retto, dal teor. del n. 423 si ha che:

La misura di un diedro è eguale a quella del suo angolo.

Così per es. dicendo un diedro di 30° s'intende

un diedro che è $\frac{30}{90}$ del diedro retto, ossia un diedro il cui angolo è 30° .

§ 5.° Piani perpendicolari.

426. Due piani che, incontrandosi, formano i diedri adiacenti eguali, si dicono *perpendicolari* fra loro. Per es. se le due rette BC, ED (fig. 211) sono perpendicolari tra loro e la AB è perpendicolare al loro piano, i due piani ABC, EBC formano i diedri adiacenti $\overline{ABCD}$, $\overline{ABCE}$ eguali, perchè gli angoli corrispondenti $\widehat{ABD}$, $\widehat{ABE}$ sono eguali: ossia i due piani ABC, EDC sono perpendicolari tra loro.

I diedri formati dai piani perpendicolari sono retti, perchè gli angoli corrispondenti sono retti.

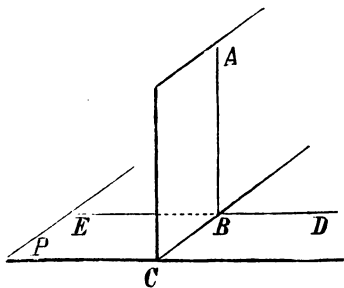


Fig. 211.

427. TEOREMA. Se una retta è perpendicolare ad un piano, ogni piano che passa per questa retta è perpendicolare al primo piano.

Sia il piano P (fig. 211) e la retta AB ad esso perpendicolare. S'immagini per AB un piano qualunque che incontri il piano P secondo la BC: nel piano P si conduca da B la BE perpendicolare a BC. I due angoli adiacenti $\widehat{ABD}$, $\widehat{ABE}$ sono manifestamente corrispondenti ai diedri adiacenti $\overline{ABCD}$, $\overline{ABCE}$ (n. 421) e sono eguali, perchè retti; dunque anche i diedri

sono eguali e sono retti; perciò il piano ABC è perpendicolare al piano P .

428. TEOREMA. *Se due piani sono perpendicolari, una perpendicolare alla loro intersezione condotta in uno di essi è perpendicolare all'altro.*

Siano i due piani ABC , DBC (fig. 211) perpendicolari tra loro, e sia la AB condotta nel primo piano e perpendicolare a BC : dico che AB è perpendicolare al piano DBC . Infatti conducasi per B nel piano DBC la DE perpendicolare a BC : gli angoli $\widehat{ABD}$, $\widehat{ABE}$ sono retti, perchè corrispondenti ai diedri $\widehat{ABCD}$, $\widehat{ABCE}$ retti per ipotesi, e la AB è perpendicolare a DE ; ma lo è anche alla BC , dunque la AB è perpendicolare al piano DBC (n. 400).

COROLLARIO 1.º *Se due piani sono perpendicolari, la perpendicolare ad uno di essi condotta per un punto dell'altro giace in questo piano.*

Infatti, riferendoci alla stessa figura 211, la perpendicolare alla BC condotta per A è perpendicolare al piano P ; ed un'altra retta condotta per A non può essere perpendicolare al piano P , perchè per un punto non passa che una sola retta perpendicolare ad un piano (n. 404).

COROLLARIO 2.º *Se due piani che s'incontrano sono perpendicolari ad un terzo, la loro intersezione è perpendicolare a questo piano.*

429. TEOREMA. *Dato un punto ed un piano, per quel punto passano infiniti piani perpendicolari al piano dato; questi costituiscono un fascio, che ha per asse la perpendicolare al piano condotta per quel punto.*

Infatti ogni piano che contiene la detta perpendicolare è perpendicolare al piano dato (n. 427);

d'altra parte un piano che passa per quel punto ed è perpendicolare al piano dato, deve contenere la detta perpendicolare (n. 428, Cor. 1.°).

430. TEOREMA. *Dato un piano ed una retta non perpendicolare al piano o giacente in esso, per questa retta passa un piano perpendicolare al piano dato ed uno solo.*

Infatti da un punto della retta si immagini la perpendicolare al piano. Il piano di queste due rette è perpendicolare al piano dato (n. 427): ed è unico, perchè ogni altro piano (condotto per la retta data) non può contenere questa perpendicolare, e perciò non può essere perpendicolare al piano dato n. (428, Cor. 1.°).

§ 6.° Piani paralleli.

431. Due piani P, Q (fig. 212) tagliati da un terzo R secondo le rette AB, CD formano otto diedri, che prendono denominazioni analoghe a quelle degli angoli formati da due rette tagliate da una terza. Vedasi il n. 79.

Valgono anche per i diedri le stesse osservazioni fatte a proposito degli angoli alterni e coniugati.

432. 1.° TEOREMA. *Se due piani tagliati da un terzo secondo rette parallele formano*

1.° o una coppia di diedri corrispondenti eguali;

2.° o una coppia di alterni eguali,

3.° o una coppia di coniugati supplementari,
tutte le coppie di diedri corrispondenti ed alterni sono eguali e le coppie di coniugati sono supplementari.

Come il n. 80, 1.°

Contrariamente:

2.° TEOREMA. *Se due piani tagliati da un terzo secondo rette parallele non soddisfanno ad una delle condizioni enunciate nel teorema precedente, non soddisfanno ad alcun'altra.*

Come il n. 80, 2.° Notisi che in tal caso i coniugati da una banda del piano segante danno una somma maggiore di due diedri retti, dall'altra minore.

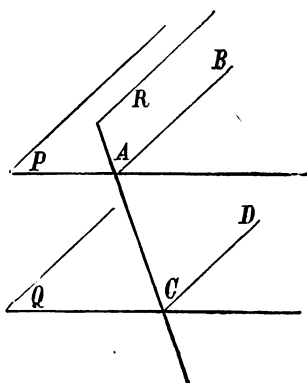


Fig. 212.

433. Due o più piani si dicono *paralleli*, se non s'incontrano, cioè se non hanno punti comuni. Per esempio:

TEOREMA. *Due piani perpendicolari ad una stessa retta sono paralleli.*

Infatti se si incontrassero, per un punto della loro intersezione passerebbero due piani perpendicolari alla stessa retta, il che è impossibile (n. 401).

434. TEOREMA. *Le intersezioni di due piani paralleli con un terzo sono parallele.*

Infatti esse non possono incontrarsi perchè situate in piani paralleli, e di più sono nel medesimo piano segante.

435. 1.° TEOREMA. *Due piani P, Q (fig. 213), che tagliati da un terzo R secondo rette parallele AB, CD soddisfanno ad una delle condizioni di cui al teor. 432, sono paralleli.*

Contrariamente:

2.° TEOREMA. *Due piani P, Q (fig. 213), che ta-*

gliati da un terzo R secondo rette parallele AB , CD non soddisfanno ad una delle condizioni di cui al teorema 432, non sono paralleli; l'incontro avviene dalla banda del piano segante, dove i coniugati interni danno una somma minore di due diedri retti.

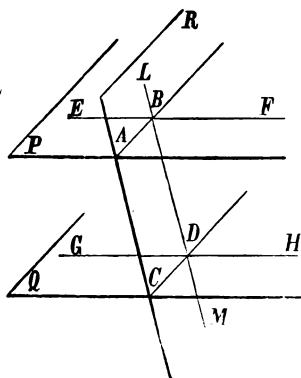


Fig. 213.

Infatti tagliando la figura con un piano perpendicolare alla AB e quindi alla CD (n. 403), si ha per sezione la figura formata da due rette EF , GH tagliate da una terza LM ; e gli angoli formati da queste rette sono le sezioni rette dei diedri formati dai piani.

Ora nel caso del teor. 1.^o detti angoli soddisfanno alle condizioni di cui al teor. 80 e le EF , GH sono parallele. Allora i due piani P , Q sono paralleli, perchè ove s'incontrassero, la loro intersezione dovrebbe essere parallela tanto alle AB e CD quanto alle EF , GH (n. 412), il che è impossibile.

Nel caso del teor. 2.^o le EF , GH s'incontrano dalla banda dove i coniugati interni danno una somma minore di $2R$; ed anche i due piani P , Q s'incontreranno secondo una retta passante per quel punto e parallela alla AB e alla CD (n. 412).

436. Sono veri anche i teoremi reciproci, e cioè:

1.^o *Due piani paralleli tagliati da un terzo formano i diedri alterni ed i corrispondenti eguali, ed i coniugati supplementari.*

2.^o *Due piani che s'incontrano tagliati da un*

terzo secondo rette parallele alla loro intersezione, formano i diedri alterni ed i corrispondenti diseguali, i coniugati non supplementari, e dalla banda dove s'incontrano, i coniugati interni danno una somma minore di due diedri retti.

437. TEOREMA. Per un punto dato A si può immaginare un piano parallelo ad un piano dato P , ma uno solo.

Infatti per A (fig. 214) s'immagini la perpendicolare AB al piano P , e il piano Q perpendicolare alla AB . Il piano Q è parallelo al piano P (n. 433).

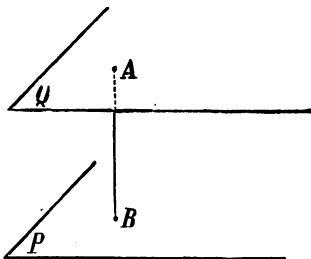


Fig. 214.

Un altro piano R passante per A non può essere parallelo a P : ed infatti, se così fosse, un piano qualunque passante per AB taglierebbe il piano P secondo una retta ed i piani Q e R secondo due rette, che dovrebbero essere entrambe parallele alla prima (n. 434), il che è assurdo.

COROLLARIO 1.° Se due piani sono paralleli, un piano parallelo all'uno, lo è anche all'altro; ed una retta parallela all'uno, lo è anche all'altro o giace in questo.

COROLLARIO 2.° Se due piani sono paralleli, un piano (od una retta) che incontra l'uno, incontra anche l'altro: ed in particolare poi: se è perpendicolare all'uno, lo è anche all'altro.

COROLLARIO 3.° Il piano (Q) parallelo ad un piano dato (P) condotto per un punto dato (A) è il

luogo delle parallele al piano stesso (P) condotte per quel punto. (n. 406, 407, 408).

438. TEOREMA. *I segmenti paralleli compresi fra una retta ed un piano paralleli, o fra due piani paralleli, sono eguali.*

Infatti i due segmenti e le congiungenti i loro estremi (che lasciano i segmenti dalla stessa banda) formano un parallelogrammo: e questo ha i lati opposti eguali.

439. TEOREMA. *Due angoli convessi coi lati paralleli sono eguali o supplementari.*

Siano i due angoli $\widehat{BAC}$, $\widehat{DEF}$ (fig. 215) coi lati AB, AC del primo ordinatamente nella stessa direzione dei lati ED, EF del secondo: dico che questi angoli sono eguali. Infatti o i piani dei due angoli coincidono, e allora siamo nel caso del n. 86; o non coincidono e allora

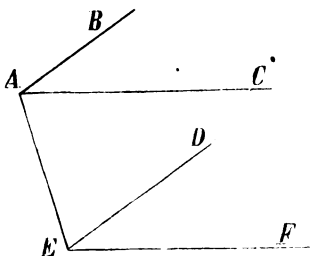


Fig. 215.

sono paralleli, perchè se si incontrassero la loro intersezione dovrebbe essere parallela tanto alle AB, ED quanto alle AC, EF (n. 412), il che è assurdo. Si congiunga A con E: se si fa scorrere su sè stesso il diedro $\widehat{BAEC}$ (n. 421), le rette AC, AB si muovono parallelamente alla loro posizione iniziale; perciò quando il punto A cade in E le AB, AC coincidono rispettivamente colle loro parallele ED, EF e i due angoli coincidono e sono eguali.

Per gli altri casi vedasi il teor. n. 86.

COROLLARIO. *Le sezioni fatte in un diedro con piani paralleli sono eguali.*

440. Due piani paralleli dividono lo spazio in tre parti, delle quali quella compresa fra i due piani dicesi *strato*.

Ritenendo i due piani paralleli come le *facce* dello strato si possono definire gli strati adiacenti, la somma, la differenza degli strati ecc....: si può insomma ripetere quanto è stato detto per i diedri.

Gli strati sono grandezze della prima specie (n. 68).

§ 7.° Distanze e luoghi. — Angolo di una retta con un piano.

441. *Proiezione di un punto A* (fig. 216) sopra un piano P è il piede B della perpendicolare condotta da A al piano P. Se il punto è sul piano, è proiezione di sè stesso.

442. *Proiezione di una retta AC* sul piano P è l'intersezione BC del piano P col piano BAC condotto per la AC e perpendicolare al piano stesso. Ne segue che la proiezione di una retta è in generale una retta ed è il luogo delle proiezioni dei suoi punti.

Se la retta è perpendicolare al piano di proiezione P, la sua proiezione è un punto: se è nel piano P, è proiezione di sè stessa.

Per avere la proiezione di un segmento basta unire le proiezioni dei suoi estremi.

Proiezione di una linea in generale è un'altra linea, luogo delle proiezioni de' suoi punti.

443. TEOREMA. *Dei segmenti che partono da un punto e terminano ad un piano*

1.° *il perpendicolare è il minimo;*

2.° due segmenti che hanno eguali proiezioni sono eguali;

3.° due segmenti che hanno diseguali proiezioni sono diseguali ed è maggiore quello che ha maggior proiezione.

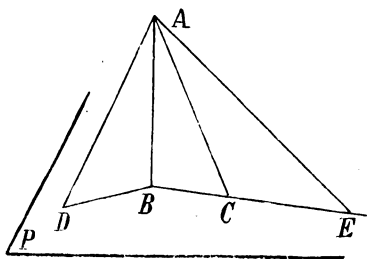


Fig. 216.

Si dimostra come il teor. 126.

Il segmento perpendicolare (AB) si dice *la distanza* del punto (A) dal piano (P).

444. Se una retta ed un piano, oppure due piani sono paralleli, dei segmenti paralleli compresi fra essi i perpendicolari (eguali tra loro) sono i minori; uno di essi si dice *la distanza* della retta dal piano, oppure dei due piani

445. TEOREMA. *Il luogo dei punti che hanno da un piano dato una distanza data è costituito da due piani paralleli al primo e ad una distanza da esso eguale alla data.*

Vedasi il n. 129.

446. TEOREMA. *Il luogo dei punti equidistanti da due punti dati è il piano perpendicolare al segmento, che li unisce nel punto medio di questo.*

Si imiti la dimostrazione del teor. 130.

COROLLARIO. *Il luogo dei punti equidistanti da tre punti non in linea retta è la retta perpendicolare al piano dei tre punti e passante pel centro della circonferenza dei punti stessi.*

Infatti se A, B, C sono i tre punti, i piani perpendicolari ai segmenti AB, BC rispettivamente nei loro punti medi si incontrano secondo una retta,

i punti della quale (ed essi soli) sono equidistanti dai tre punti dati.

447. TEOREMA *Il luogo dei punti equidistanti da due piani che s'incontrano è costituito dai piani bisettori dei loro diedri* ⁽¹⁾.

Vedasi il n. 131.

448. TEOREMA. *Il luogo dei punti equidistanti da due piani paralleli è il piano parallelo ai primi condotto pel punto medio della loro distanza.*

Vedasi il n. 132.

OSSERVAZIONE. Il detto piano è bisettore dello strato compreso fra i piani paralleli, ed è anche il luogo dei punti medi di tutti i segmenti che terminano ai piani stessi.

499. ANGOLO DI UNA RETTA CON UN PIANO.

TEOREMA. *Data una retta ed un piano che la incontra, l'angolo acuto che la retta fa colla sua proiezione sul piano è il minimo degli angoli, che la medesima fa colle rette del piano che la incontrano.*

Sia AB una retta (fig. 217) e P un piano che la incontra in B. Da un punto A della AB condu-

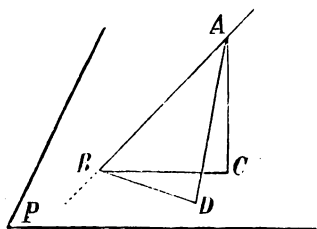


Fig. 217.

casi AC perpendicolare al piano P: sarà BC la proiezione di AB. Sia BD un'altra retta del piano P, dico che $\widehat{ABC} < \widehat{ABD}$. Infatti preso $BD = BC$ si unisca A con D. I due triangoli ABC, ABD hanno AB

⁽¹⁾ Veramente non è stato detto come si trova il piano bisettore di un diedro, ma dopo quanto si è osservato sulla correlazione tra i diedri e gli angoli, lo studioso supplisce facilmente alla omissione. Lo stesso valga per casi consimili che possono darsi in seguito.

comune, $BC = BD$, ed $AC < AD$ (n. 443), perciò:
 $\widehat{ABC} < \widehat{ABD}$ (n. 107, 2.°).

Il supplementare di $\widehat{ABC}$ è il massimo.

450. Si dice *angolo di una retta con un piano* l'angolo acuto che la retta fa colla sua proiezione sul piano. Se la retta è perpendicolare al piano, la sua proiezione è un punto, ma allora essa forma angoli retti con tutte le rette del piano.

OSSERVAZIONE. L'angolo che un raggio di retta uscente da un punto di un piano fa con questo piano è il complemento dell'angolo che il raggio stesso fa col raggio perpendicolare al piano condotto per lo stesso punto e dalla stessa banda del primo. Ne segue che un raggio perpendicolare ed uno obliquo ad un piano in uno stesso punto formano un angolo acuto se si trovano dalla stessa banda rispetto al piano, e reciprocamente.

§ 8.° Rette nello spazio.

451. Due rette nello spazio o giacciono in uno stesso piano ed allora sono concorrenti o parallele; oppure ogni piano che passa per una di esse non contiene l'altra, ed allora le due rette si dicono *sghembe*.

452. Si dice *angolo di due rette sghembe* l'angolo formato dalle parallele a queste rette condotte da un punto qualunque, che può anche prendersi sopra una delle due rette (¹). Se quest'angolo è retto le due rette si dicono *ortogonali*.

Dopo questa definizione ciò che è detto al n. 400 può essere generalizzato così:

(¹) S' intende uno degli angoli acuti formati da queste rette, a meno che non sieno retti tutti quattro.

TEOREMA. *Una retta è perpendicolare ad un piano, quando è ortogonale a due rette del piano non parallele.*

453. TEOREMA. *Se due rette sono ortogonali, per una di esse può passare un piano perpendicolare all'altra ed uno solo: in ogni altro caso non è possibile.*

454. TEOREMA. *Date due rette sghembe, per una di esse può passare un piano parallelo all'altra ed uno solo.*

Questo è il piano determinato da una di esse e dalla parallela all'altra condotta per un punto della prima (n. 407).

455. TEOREMA. *Date due rette sghembe ed un punto fuori di esse, per questo punto passa (in generale) una retta che incontra le due date ed una sola.*

Questa è l'intersezione dei piani determinati dal punto e da ciascuna delle due rette ⁽¹⁾.

456. TEOREMA. *Date due rette sghembe ed un punto fuori di esse, per questo punto passa un piano parallelo alle due rette ed uno solo.*

Questo è il piano determinato dalle parallele alle due rette condotte per quel punto (n. 407).

457. TEOREMA. *Date due rette sghembe, dei segmenti terminati alle due rette ve n'è uno perpendicolare ad entrambe ed uno solo; esso è il minimo.*

Siano AB, CD (fig. 218) due rette sghembe; per una di esse, la AB, s'immagini il piano parallelo all'altra e sia BAM, e per la CD il piano perpendicolare al piano BAM (n. 430); sia MN la loro intersezione, la quale incontri la AB in un punto P; da P si conduca la PQ perpendicolare a CD:

⁽¹⁾ Può darsi che la detta intersezione sia parallela ad una delle rette date.

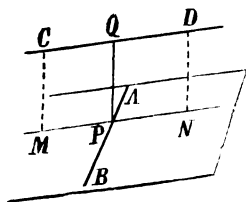


Fig. 218.

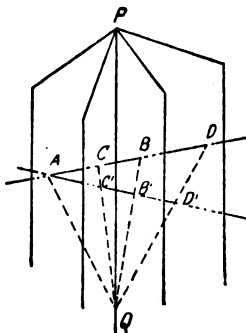
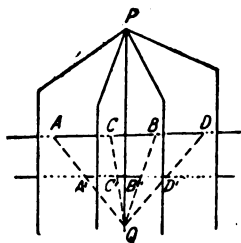
dico che PQ è il segmento richiesto. Infatti PQ, essendo perpendicolare a CD, lo è anche ad MN parallela a CD, perciò PQ perpendicolare all'intersezione MN dei due piani, è perpendicolare al piano BAM (n. 428) e per conseguenza alla AB.

Tale segmento è unico: infatti una retta perpendicolare ad AB ed a CD è ortogonale ad MN (n. 452), e perciò è perpendicolare al piano BAM: ma le perpendicolari a questo piano che incontrano la CD devono essere nel piano CDM (n. 428, Cor. 1.º) il quale non ha che il punto P comune colla AB; ma dal punto P non si può condurre che una sola perpendicolare a CD, e questa è appunto la PQ.

Dopo ciò è manifesto che PQ è il minimo dei segmenti che terminano alle rette AB, CD.

Questo segmento minimo dicesi la *distanza* delle due rette sghembe.

458. TEOREMA. Se quattro piani di un fascio sono incontrati da una



traversale in quattro punti che formano un gruppo armonico, i quattro piani determinano un gruppo armonico sopra un'altra trasversale che li incontra.

Sia ABCD (fig. 219) il grup-

Fig. 219.

po armonico determinato sopra la AD da quattro piani del fascio che ha per asse PQ.

La nuova trasversale abbia il punto A comune colla prima o sia parallela alla prima. In questo caso o il piano delle due trasversali incontra l'asse PQ in un punto Q (nel quale concorrono le AA', BB', CC' DD', che uniscono i punti corrispondenti delle due trasversali), ed allora il gruppo Q(ABCD) è armonico (n. 340); o il piano stesso è parallelo a PQ, ed allora anche le AA', BB', CC', DD' sono parallele e formano un gruppo armonico. Perciò in entrambi i casi anche i quattro punti A', B', C', D' formano un gruppo armonico.

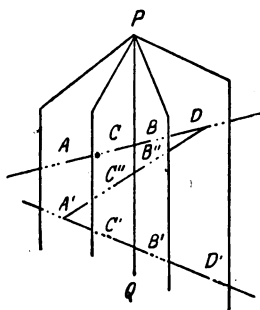


Fig. 220.

Se poi la seconda trasversale A'B'C'D' è sghemba colla prima (fig. 220), si unisca A' con D e siano C'', B'' i punti d'incontro della A'D coi piani PQC, PQB. Il gruppo ABCD essendo armonico, lo è pure A'B''C''D pel caso precedente, e per la stessa ragione anche il gruppo A'B'C'D' è armonico.

Lo stesso dicasi se i quattro piani fossero paralleli.

Il gruppo dei quattro piani si dice che è *armonico*; e si enuncia questo teorema dicendo che la proprietà del gruppo armonico è *proiettiva* anche nello spazio.

459. TEOREMA. *Se una trasversale di un gruppo armonico di piani è parallela ad uno dei piani, i due segmenti della trasversale determinati dagli altri tre sono eguali.*

Si dimostra come il teor. 341 facendo passare per la trasversale un piano qualunque.

§ 9.º Angoloidi — definizioni.

460. Sia un poligono ABCDE (fig. 221), ed un punto O fuori del piano del poligono. I raggi OA, OB, OC, OD, OE, determinano una figura (astra-

zione fatta dal poligono) che dicesi *angolo poliedro*, o *angolo solido* o *angoloide*. Il punto O è il *vertice*, i raggi OA.... OE sono gli *spigoli* e gli angoli $\widehat{AOB}$ $\widehat{BOC}$,.... $\widehat{EOA}$ le *facce* dell'angoloide. Le facce d'un angoloide sono angoli convessi.

Se si chiamano *consecutivi* due angoli col vertice ed un lato in comune e non posti nello stesso piano, si può anche dire che l'angoloide è formato da più angoli consecutivi tali che il primo è consecutivo dell'ultimo.

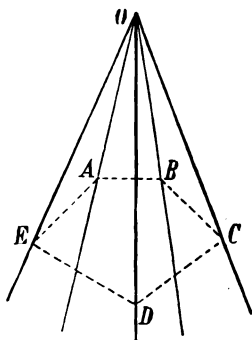


Fig. 221.

Un angoloide si legge enunciando prima il vertice e poi un punto su ciascuno spigolo: così si dice l'angoloide OABCDE (fig. 221).

461. Un angoloide è *convesso*, se giace tutto da una banda del piano di ciascuna faccia: diversamente è *concavo*. Noi non considereremo che angolidi convessi.

462. Si dicono *diedri* dell'angoloide i diedri contenuti da ciascuna faccia colla successiva. L'angoloide convesso non può avere che diedri convessi, ed è interno a ciascuno de' suoi diedri ⁽¹⁾.

463. Un angoloide ha tante facce, quanti sono i diedri, e non può aver meno di tre facce; quando ne ha tre dicesi *triedro*; si dice *tetraedro* se ne ha quattro, *pentaedro* se ne ha cinque, ecc.

Una faccia di angoloide è *adiacente* ai diedri, che hanno per spigoli i suoi lati. In un triedro poi

(1) Vedasi l'analoga osservazione fatta al n. 92 per i poligoni.

una faccia ed un diedro non adiacenti si dicono *opposti*.

Le facce ed i diedri di un angoloide si dicono anche i suoi *elementi*.

464. Un angoloide di n facce vien tagliato da un piano, che incontri tutti i suoi spigoli, secondo un poligono di n lati. Questo poligono sezione è convesso o concavo secondo che è convesso o concavo l'angoloide.

Si dicono *interni* od *esterni* all'angoloide i punti che sono interni od esterni alle sue sezioni.

Lo studio dell'angoloide di n facce presenta delle analogie con quello del poligono di n lati; molti teoremi sui poligoni si traducono in teoremi sugli angoloidi, quando in essi si cambino le parole *lati* ed *angoli* nelle parole *facce* e *diedri*, come avremo occasione di far notare.

465. Una retta che passa per un punto interno ad un angoloide (non parallela però ad uno spigolo, nè passante pel vertice), incontra l'angoloide in *almeno* due punti situati da bande opposte del primo, e se l'angoloide è convesso in *non più* di due punti. Per verificarlo basta considerare una sezione fatta con un piano passante per questa retta (n. 94).

§ 10.º Angoloidi triedri e poliedri opposti e supplementari.

466. *Triedri e poliedri opposti*. Due triedri ed in generale due angoloidi sono *opposti al vertice*, o semplicemente *opposti*, se gli spigoli dell'uno sono

i prolungamenti degli spigoli dell'altro. Così i due triedri $OABC$, $OA'B'C'$ (fig. 222) sono opposti.

Se due triedri e in generale due angoloidi sono opposti, le facce ed i diedri dell'uno sono ordinatamente eguali alle facce ed ai diedri dell'altro, ma i due angoloidi non sono eguali, cioè non si possono far coincidere. Infatti considerando per es. i due triedri $OABC$, $OA'B'C'$, se si fanno coincidere le facce eguali $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'O'B'}$ in modo che OA cada su OA' , ed OB su OB' , i due triedri si trovano da bande opposte della faccia comune AOB . Se poi si fanno coincidere le stesse facce in modo che OA' cada su OB ed OB' su OA , i due triedri si trovano bensì dalla stessa banda, ma non coincidono, perchè i diedri $\overline{OA'}$ ed $\overline{OB}$, come pure $\overline{OB'}$ ed $\overline{OA}$ (che hanno lo spigolo ed una faccia coincidenti) non sono eguali. Analogamente dicasi per un angoloide qualunque.

Questo è il primo caso che ci si presenta di figure aventi tutti gli elementi ordinatamente eguali senza essere eguali. Ciò avviene perchè, se immaginiamo i due angoloidi coi vertici rivolti all'occhio, noi vediamo succedersi gli elementi eguali nei due angoloidi con rotazioni in senso inverso l'una all'altra.

467. Però se il triedro ha due facce eguali (o, come si usa dire, è *isoscele* o *isoedro*), la coincidenza è possibile. Suppongasì ad es. che il triedro $OABC$

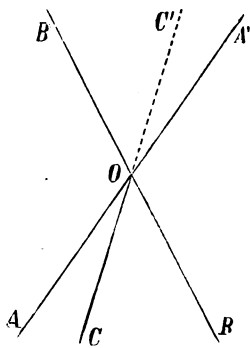


Fig. 222.

(fig. 222) abbia eguali le facce $\widehat{AOB}$, $\widehat{COB}$; allora anche le facce $\widehat{AOB'}$, $\widehat{COB'}$ del triedro opposto sono eguali, perchè eguali alle prime. Ciò posto, se si fanno coincidere le facce $\widehat{COB}$ ed $\widehat{AOB'}$, che sono eguali, in modo che OB' cada su OB ed OA' su OC , i due triedri cadono dalla stessa banda della faccia comune; e poichè i diedri $\widehat{OB}$, $\widehat{OB'}$ sono eguali, la faccia $\widehat{B'OC'}$ cadrà sulla faccia eguale $\widehat{AOB}$ e coinciderà con essa; e i due triedri coincideranno ⁽¹⁾.

468. *Triedri e poliedri supplementari.* — Premettiamo anzitutto il

TEOREMA. *Se per un punto dello spigolo di un diedro $\widehat{CABD}$, (fig. 223) si conducono i raggi AM , AN perpendicolari alle facce CAB , DAB e dalla stessa banda dove trovasi il diedro, l'angolo $\widehat{MAN}$ dei detti raggi è supplementare della sezione retta del diedro.*

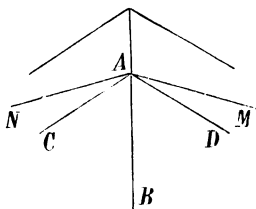


Fig. 223.

Infatti se si fa la sezione retta del diedro nel punto A e sia $\widehat{CAD}$, che si trova manifestamente in un piano coll'angolo $\widehat{MAN}$, si avrà: $\widehat{MAC} = \widehat{R}$, $\widehat{NAD} = \widehat{R}$; di più $\widehat{MAN} + \widehat{CAD} = \widehat{MAC} + \widehat{NAD}$ ossia $\widehat{MAN} + \widehat{CAD} = 2\widehat{R}$.

469. Ciò posto:

TEOREMA. *Se dal vertice di un triedro si conducono i raggi perpendicolari alle facce e dalla stessa banda dove trovasi il triedro, si determina un secondo*

⁽¹⁾ Non sono però gli elementi corrispondenti (cioè gli opposti) che coincidono.

triedro; gli spigoli del primo sono perpendicolari alle facce del secondo.

Sia $OABC$ (fig. 224) un triedro e sieno OA' , OB' , OC' i raggi perpendicolari alle facce $\widehat{BOC}$, $\widehat{COA}$, $\widehat{AOB}$ condotti dalla stessa banda del triedro rispetto a ciascuna di esse. Poichè OA' è perpendicolare alla faccia $\widehat{BOC}$, lo è anche a OC , e poichè OB' è perpendicolare alla faccia $\widehat{COA}$, lo è anche a OC ; dunque OC è perpendicolare ad OA' e ad OB' e per conseguenza alla faccia $\widehat{A'OB'}$. Di più essendo OC' in un col triedro dato dalla stessa banda della faccia $\widehat{AOB}$, l'angolo $\widehat{COC'}$ è acuto, il che prova che alla sua volta il raggio perpendicolare OC in un col triedro $OA'B'C'$ sono dalla stessa banda della faccia $\widehat{A'OB'}$ (n. 450, Osserv.).

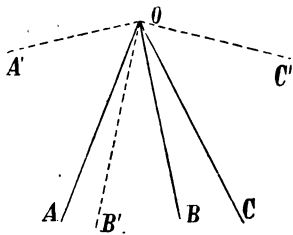


Fig. 124.

Similmente OB è perpendicolare a $\widehat{C'OA'}$ e dalla stessa banda di essa col secondo triedro, ed OA è perpendicolare a $\widehat{B'OC'}$ e della stessa banda col secondo triedro.

470. TEOREMA. *Dati due triedri col vertice comune, se gli spigoli dell'uno sono perpendicolari alle facce dell'altro e dalla stessa banda del primo, le facce di ciascuno sono supplementari delle sezioni rette dei diedri dell'altro.*

Infatti nei triedri $OABC$, $OA'B'C'$ (fig. 224) gli spigoli OB' , OC' sono perpendicolari alle facce del diedro OA e dalla stessa banda di esso: dunque $\widehat{B'OC'}$ è supplementare della sezione retta del diedro $\widehat{OA}$ (n. 468). Analogamente dicasi delle altre facce dell'uno e dell'altro triedro.

Questi teoremi si estendono senza difficoltà ad un angoloide qualunque, e cioè:

471. TEOREMA. *Se pel vertex di un angoloide si conducono i raggi perpendicolari alle successive facce dalla stessa banda dell'angoloide, si determina un secondo angoloide; gli spigoli del primo sono pure perpendicolari alle facce del secondo e dalla stessa banda con questo. Le facce di ciascun angoloide sono supplementari alle sezioni rette dei diedri dell'altro.*

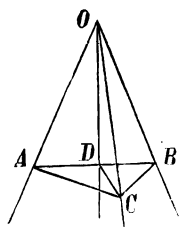
Tali diedri ed angoloidi in generale si dicono *supplementari*.

§ 11.° Alcuni teoremi sugli angoloidi triedri e poliedri. — Sulle facce.

472. TEOREMA. *In un triedro una faccia è minore della somma delle altre due.*

Sia $OABC$ un triedro (fig. 225) e sia $\widehat{AOB}$ la faccia maggiore: dico che

$$\widehat{AOB} < \widehat{BOC} + \widehat{COA}.$$



Poichè $\widehat{AOB} > \widehat{BOC}$, nella faccia $\widehat{AOB}$ facciasi $\widehat{BOD} = \widehat{BOC}$: si prenda ancora $OD = OC$ e per i punti D e C s'immagini un piano che incontri gli spigoli OA , OB in

Fig. 225. A ed in B . I due triangoli BOC , BOD sono eguali per avere due lati e l'angolo compreso eguali, perciò $BC = BD$. Dal triangolo ACB si ha

$$AC > AB - BC, \text{ ossia } AC > AD.$$

Infine i due triangoli AOC , AOD hanno AO comune, $OD = OC$, e $AD < AC$, perciò $\widehat{AOD} < \widehat{AOC}$.

(n. 107, 2.^o); ed aggiungendo gli angoli eguali $\widehat{DOB}$, $\widehat{BOC}$.

$$\widehat{AOD} + \widehat{DOB} < \widehat{AOC} + \widehat{BOC}$$

ossia

$$\widehat{AOB} < \widehat{AOC} + \widehat{BOC}.$$

Si confronti col n. 102.

COROLLARIO. *In un triedro una faccia è maggiore della differenza tra le altre due.*

473. TEOREMA. *In un angoloide una faccia è minore della somma delle altre.*

Nell'angoloide OABCDE (fig. 221) dico che

$$\widehat{AOB} < \widehat{BOC} + \widehat{COD} + \widehat{DOE} + \widehat{EOA}.$$

Si dimostra scomponendo l'angoloide nei triedri OABC, OACD, OADE, ed imitando la dimostrazione del teorema 102.

474. 1.^o TEOREMA. *In un triedro se due diedri sono eguali, le facce opposte sono eguali.*

Nel triedro OABC (fig. 222) sia $\overline{OB} = \overline{OA}$: dico che $\widehat{AOC} = \widehat{BOC}$. Si costruisca il triedro opposto OA'B'C' e lo si sovrapponga al primo in modo che OA' cada su OB ed OB' su OA; in tal modo i due triedri sono dalla stessa banda della faccia AOB. Ora essendo $\overline{OB} = \overline{OA}$ ed $\overline{OA} = \overline{OA'}$, sarà $\overline{OB} = \overline{OA'}$ e similmente $\overline{OA} = \overline{OB'}$; perciò i piani delle facce $\widehat{BOC}$, $\widehat{COA}$ coincideranno rispettivamente con quelli delle facce $\widehat{A'OC'}$, $\widehat{C'OB}$ ed anche OC' con OB; sarà cioè $\widehat{BOC} = \widehat{A'OC'}$ e $\widehat{COA} = \widehat{C'OB'}$; ma $\widehat{A'OC'} = \widehat{COA}$, dunque $\widehat{BOC} = \widehat{COA}$.

COROLLARIO. *In un triedro se i tre diedri sono eguali, le facce sono eguali.*

2.^o TEOREMA. *In un triedro se due diedri sono*

diseguali, le facce sono diseguali, ed al maggiore diedro è opposta la faccia maggiore.

Nel triedro OABC (fig. 225) sia $\overline{OC} > \overline{OB}$, dico che $\widehat{AOB} > \widehat{AOC}$. Infatti nel diedro $\overline{OC}$ si immagini il diedro $\overline{BOCD} = \overline{OB}$ e sia OD l'intersezione della faccia $\widehat{COD}$ colla faccia $\widehat{AOB}$. Nel triedro OBCD essendo $\overline{BOCD} = \overline{OB}$, si avrà $\widehat{BOD} = \widehat{COD}$. Ma nel triedro OACD è

$$\widehat{AOC} < \widehat{AOD} + \widehat{COD}$$

e sostituendo

$$\widehat{AOC} < \widehat{AOD} + \widehat{BOD}.$$

ossia

$$\widehat{AOC} < \widehat{AOB}.$$

475. Reciprocamente

TEOREMA. *In un triedro*

1.^o *Se due facce sono eguali, i diedri opposti sono eguali.*

COROLLARIO. *Se le tre facce sono eguali, i tre diedri sono eguali.*

2.^o *Se due facce sono diseguali, i diedri opposti sono diseguali, ed alla maggior faccia è opposto il diedro maggiore.*

OSSERVAZIONE. Si confrontino questi teoremi con quelli dei n. 100 e 101.

476. TEOREMA. *In un triedro la somma delle facce è minore di $4\widehat{R}$ (¹).*

Nel triedro OABC (fig. 222) si prolunghi uno

(¹) Questo teorema e il teorema 472 danno le condizioni necessarie perchè tre angoli possano essere facce di un triedro: si può provare che le stesse condizioni sono anche sufficienti a determinare un triedro.

spigolo OA e sia OA' il prolungamento. Nel triedro OA'BC si ha

$$\widehat{BOC} < \widehat{BOA'} + \widehat{COA'}$$

ed aggiungendo $\widehat{AOB} + \widehat{AOC}$

$$\widehat{AOB} + \widehat{AOC} + \widehat{BOC} < \widehat{AOB} + \widehat{AOC} + \widehat{BOA'} + \widehat{COA'}$$

Ma $\widehat{AOB} + \widehat{BOA'} = 2\widehat{R}$; $\widehat{AOC} + \widehat{COA'} = 2\widehat{R}$,
perciò sostituendo

$$\widehat{AOB} + \widehat{AOB} + \widehat{BOC} < 4\widehat{R}$$

477. TEOREMA. *In un angoloide la somma delle facce è minore di $4\widehat{R}$.*

Nell'angoloide OABCDE (fig. 226) si prolunghino le due facce $\widehat{BOC}$, $\widehat{DOE}$ (che comprendono la faccia $\widehat{COD}$) fino ad incontrarsi, e sia OF l'intersezione; si ottiene così l'angoloide OABFE con una faccia di meno, e nel quale la somma delle facce supera la somma delle facce del primo. Infatti si passa da questa a quella sostituendo alla faccia $\widehat{COD}$ la somma dei due angoli $\widehat{COF} + \widehat{DOF}$, ed è chiaro che $\widehat{COF} + \widehat{DOF} > \widehat{COD}$. Ripetendo la costruzione analoga sul nuovo angoloide si giunge ad un triedro (OFBG), nel quale per la stessa ragione la somma delle facce supera quella delle facce del precedente. Ma in un triedro la somma delle facce è minore di $4\widehat{R}$, dunque ecc.

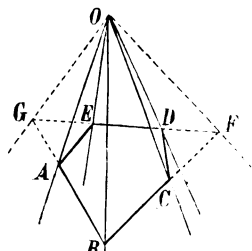


Fig. 226.

§ 12.° Sui diedri.

478. TEOREMA. *In un triedro la somma dei diedri è compresa fra $2\widehat{R}$ e $6\widehat{R}$.*

Sieno $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$, le sezioni rette dei diedri di un triedro: indichiamo con $\widehat{a'} \widehat{b'} \widehat{c'}$, le facce corrispondenti del triedro supplementare. In questo secondo triedro si ha

$$\widehat{a'} + \widehat{b'} + \widehat{c'} < 4\widehat{R}$$

ed aggiungendo $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}$

$$\widehat{a'} + \widehat{b'} + \widehat{c'} + \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < 4\widehat{R} + \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}$$

ma (n. 446)

$$\widehat{a'} + \widehat{A} = 2\widehat{R}, \quad \widehat{b'} + \widehat{B} = 2\widehat{R}, \quad \widehat{c'} + \widehat{C} = 2\widehat{R}$$

sostituendo

$$6\widehat{R} < 4\widehat{R} + \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}$$

da cui togliendo $4\widehat{R}$

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} > 2\widehat{R}$$

La somma $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}$ è minore di $6\widehat{R}$, perchè ciascun angolo è minore di $2\widehat{R}$.

479. TEOREMA. *In un angoloide di n facce la somma dei diedri è compresa fra $(2n - 4)\widehat{R}$ e $2n\widehat{R}$.*

Si dimostra come il precedente ricorrendo all'angoloide supplementare.

480. TEOREMA. *In un triedro un diedro aumentato di due diedri retti supera la somma degli altri due ⁽¹⁾.*

Ritenute le stesse notazioni del teor. 478, dal secondo triedro si ha:

$$\widehat{b'} + \widehat{c'} > \widehat{a'},$$

ed aggiungendo $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}$

(¹) Questo teorema ed il teor. 478 danno le condizioni necessarie, perchè tre diedri possano essere diedri di un triedro: si può provare che le stesse condizioni sono anche sufficienti a determinare un triedro.

$$\widehat{b'} + \widehat{c'} + \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} > \widehat{a'} + \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}$$

ma

$$\widehat{a'} + \widehat{A} = 2\widehat{R}, \quad \widehat{b'} + \widehat{B} = 2\widehat{R}, \quad \widehat{c'} + \widehat{C} = 2\widehat{R}$$

sostituendo

$$4\widehat{R} + \widehat{A} > 2\widehat{R} + \widehat{B} + \widehat{C}$$

da cui togliendo $2\widehat{R}$

$$\widehat{A} + 2\widehat{R} > \widehat{B} + \widehat{C}.$$

481. TEOREMA. *In un angoloide di n facce un diedro aumentato di $2(n - 2)$ diedri retti supera la somma degli altri.*

Si dimostra come il precedente.

§ 13.° Teoremi sull'eguaglianza degli angoloidi triedri e poliedri.

482. TEOREMA. *Se due triedri hanno una faccia e i due diedri adiacenti rispettivamente eguali, sono pure eguali gli altri elementi opposti ad elementi eguali; ed i due triedri o sono eguali, o l'uno è eguale all'opposto dell'altro.*

Siano i due triedri $OABC$, $O'A'B'C'$ (fig. 227) e sieno

$$\widehat{BOC} = \widehat{B'O'C'}$$

$$\overline{OB} = \overline{O'B'} \text{ ed } \overline{OC} = \overline{O'C'}.$$

Si sovrappongano le facce eguali in modo che OB cada su $O'B'$ e quindi OC su $O'C'$. Possono darsi

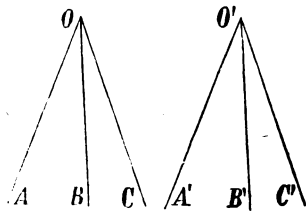


Fig. 227.

due casi: o i triedri risultano dalla stessa banda delle facce coincidenti o da bande opposte. Nel primo caso essendo $\overline{OB} = \overline{O'B'}$, ed $\overline{OC} = \overline{O'C'}$, i piani delle due facce $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'OC'}$ coincideranno con

quelli delle facce $\widehat{A'OB'}$, $\widehat{A'OC'}$; perciò anche OA coinciderà con $O'A'$: da cui $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$, $\widehat{AOC} = \widehat{A'OC'}$, $\overline{OA} = \overline{O'A'}$, perchè coincidenti, e i due triedri saranno eguali.

Se poi i due triedri fossero da bande opposte delle facce coincidenti, si trovi il triedro opposto ad $O'A'B'C'$: questo ed $OABC$ si troveranno nelle condizioni del primo caso e saranno eguali: perciò anche gli elementi dei due triedri dati saranno eguali.

483. 1.^o TEOREMA. *Se due triedri hanno due facce e il diedro compreso rispettivamente eguali, sono eguali anche gli altri elementi opposti ad elementi eguali; ed i due triedri o sono eguali, o l'uno è eguale all'opposto dell'altro.*

Nei due triedri $OABC$, $O'A'B'C'$ (fig. 223) sia $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$, $\widehat{AOC} = \widehat{A'OC'}$ e $\overline{OA} = \overline{O'A'}$. Si sovrappongano le facce eguali $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'OB'}$ in modo che OA cada su $O'A'$ e quindi OB su $O'B'$. Possono darsi due casi come nel teorema precedente. Se i triedri si trovano dalla stessa banda delle facce coincidenti, per essere $\overline{OA} = \overline{O'A'}$ i piani delle facce $\widehat{AOC}$, $\widehat{A'OC'}$ coincideranno, e per essere $\widehat{AOC} = \widehat{A'OC'}$ anche OC coinciderà con $O'C'$; da cui $\widehat{BOC} = \widehat{B'OC'}$, $\overline{OB} = \overline{O'B'}$, ed $\overline{OC} = \overline{O'C'}$, perchè coincidenti, e i due triedri saranno eguali.

Se i due triedri sono da bande opposte delle facce coincidenti, si procede come nel teorema precedente.

2.^o TEOREMA. *Se due triedri hanno due facce rispettivamente eguali e i diedri compresi diseguali, sono diseguali le facce opposte a questi diedri. e*

precisamente al maggior diedro è opposta la faccia maggiore

Nei due triedri $OABC$, $O'A'B'C'$ (fig. 228) sieno $\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$, $\widehat{BOC} = \widehat{B'O'C'}$ e $\overline{OB} > \overline{O'B'}$. Si so-

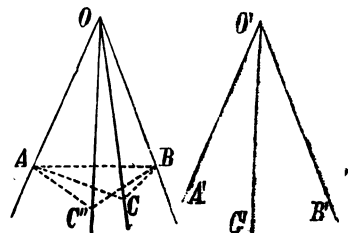


Fig. 228

vrappongano le facce eguali $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'O'B'}$ in modo che $O'B'$ cada su OB e quindi $O'A'$ su OA . Possono darsi due casi come nei teoremi precedenti. Se i due triedri cadono dalla stessa banda

delle facce coincidenti, per essere $\overline{OB} > \overline{O'B'}$ la faccia $C'O'B'$ prenderà una posizione interna al diedro OB ; sia $\widehat{BOC''}$. Sui due spigoli OC , OC'' si prenda $OC = OC''$ e per i punti C e C'' si faccia passare un piano a tagliare i due triedri $OABC$, $OABC''$ secondo i triangoli ABC , ABC'' . I due triangoli COB , $C''OB$ sono eguali, per essere OB comune, $OC = OC''$ e $\widehat{BOC} = \widehat{BOC''}$; da cui $BC = BC''$. Nei due triangoli ABC , ABC'' essendo AB comune, $BC = BC''$ e $\widehat{ABC} > \widehat{ABC''}$, sarà pure $AC > AC''$. Finalmente nei due triangoli OAC , OAC'' essendo OA comune, $OC = OC''$ e $AC > AC''$, sarà $\widehat{AOC} > \widehat{AOC''}$ e perciò anche $\widehat{AOC} > \widehat{A'O'C'}$.

Nel secondo caso si ricorre come nei teoremi precedenti al triedro opposto ad $O'A'B'C'$.

484. Reciprocamente .

1.° TEOREMA. *Se due triedri hanno due facce rispettivamente eguali e la terza eguale alla terza (cioè le tre facce rispettivamente eguali), sono eguali i diedri opposti a facce eguali; e i due triedri, o sono eguali, o l'uno è eguale all'opposto dell'altro.*

2.° TEOREMA. *Se due triedri hanno due facce rispettivamente eguali e le rimanenti diseguali, sono diseguali i diedri opposti alle facce diseguali, e precisamente alla maggior faccia è opposto il diedro maggiore* ⁽¹⁾.

485. TEOREMA. *Se due triedri hanno i diedri rispettivamente eguali, sono eguali le facce opposte a diedri eguali; e i due triedri o sono eguali, o l'uno è eguale all'opposto dell'altro.*

Infatti i loro triedri supplementari avranno le facce rispettivamente eguali, e pel teorema n. 484 1.° i diedri opposti ad esse pure eguali: per conseguenza i primi triedri avranno le facce rispettivamente eguali e saranno eguali, oppure l'uno sarà eguale all'opposto dell'altro.

486. TEOREMA. *Se due angoloidi dell'egual numero di facce hanno le facce ed i diedri ordinatamente eguali ad eccezione*

- 1.° *di un diedro e delle due facce adiacenti,*
- 2.° *di una faccia e dei due diedri adiacenti,*
- 3.° *di tre facce consecutive,*
- 4.° *di tre diedri consecutivi,*

(1) Dai teoremi sull'eguaglianza dei triedri consegue che: *una figura solida, che ha fissi tre punti non in linea retta è immobile.*

Infatti se i punti O, A, B d'una figura solida (fig. 226) sono fissi ed un quarto punto C della figura potesse prendere un'altra posizione C'' (situato naturalmente dalla stessa banda di C rispetto al piano AOB), il triedro OABC prenderebbe la posizione OABC'' cioè i triedri OABC, OABC'' sarebbero eguali, e precisamente

$$\widehat{AOC} = \widehat{AOC''} \cdot \widehat{BOC} = \widehat{BOC''},$$

da cui $\widehat{BOAC} = \widehat{BOAC''}$ e $\widehat{AOBC} = \widehat{AOBC''}$
il che è impossibile.

sui quali non si fa alcuna ipotesi, anche questi elementi sono eguali, e i due angoloidi o sono eguali o l'uno è eguale all'opposto dell'altro.

Si dimostra in modo analogo a quello tenuto pei triedri.

OSSERVAZIONE. Si confrontino questi teoremi con quelli del § 4.º Cap. 2.º sull'eguaglianza dei triangoli e dei poligoni, notandone le analogie e le differenze.

487. TEOREMA. *Due angoloidi cogli spigoli ordinatamente nella stessa direzione sono eguali.*

Sieno i triedri $OABC$, $O'A'B'C'$ (fig. 229) cogli spigoli OA , $O'A'$; OB , $O'B'$; OC , $O'C'$ nella stessa

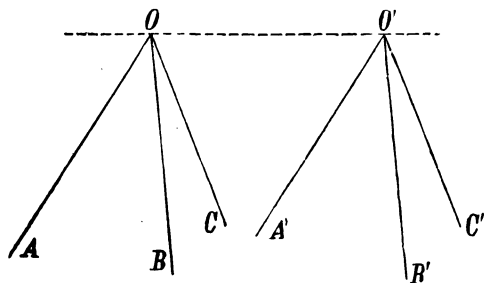


Fig. 229.

direzione. Si conduca la OO' e si faccia muovere il triedro $O'A'B'C'$ in modo che il piano delle parallele OA , $O'A'$ scorra su sè

stesso strisciando lungo la OO' . È chiaro che quando O' cade in O , la $O'A'$ si dispone secondo OA ; così pure $O'B'$, $O'C'$ si dispongono sopra OB ed OC , perchè anche i diedri $AOO'B'$, $AOO'C'$ scorrono su loro stessi (n. 408), ed i due triedri coincidono.

La dimostrazione vale per due angoloidi qualunque.

COROLLARIO. *Se gli spigoli di due angoloidi sono ordinatamente in direzione opposta, l'uno è eguale all'opposto dell'altro.*

§ 14.° Angoloidi regolari.

488. Un angoloide è *regolare* se ha le facce eguali ed i diedri eguali ⁽¹⁾. Nel triedro (n. 475, Cor.) se le facce sono eguali, i diedri sono eguali e reciprocamente; il che non può dirsi per gli altri angoloidi.

Due angoloidi regolari opposti sono eguali.

489. Fra gli angoloidi regolari meritano speciale considerazione quelli, le cui facce sono eguali ad angoli di poligoni regolari.

Ammesso per ora che si possano costruire, si può facilmente verificare (tenendo presente il teorema n. 476) che:

1.° Colle facce eguali all'angolo del triangolo regolare non possono esistere che tre angoloidi regolari e cioè: il triedro, il tetraedro ed il pentaedro.

2.° Colle facce eguali all'angolo del quadrato non può esistere che un solo angoloide regolare e cioè il triedro.

3.° Colle facce eguali all'angolo del pentagono regolare non può esistere che un solo angoloide regolare e cioè il triedro.

4.° Oltre i cinque suindicati non possono esistere altri angoloidi regolari colle facce eguali ad angoli di poligoni regolari.

(1) Per darne un esempio, se pel centro del cerchio circoscritto ad un poligono regolare si immagina la perpendicolare al piano del poligono, unendo uno de' suoi punti coi vertici del poligono si ha un angoloide regolare, come è facile verificare.

CAPITOLO II.

I POLIEDRI

§ 1.º Definizioni.

490. Si dice *solido poliedro* o semplicemente *poliedro* un solido finito, la cui superficie sia costituita da poligoni piani. Per esempio se si taglia un angoloide con un piano che incontri tutti gli spigoli, si determina un poliedro. Questi poligoni si dicono le *facce* del poliedro: i lati delle facce (ciascuno comune a due di esse) si dicono gli *spigoli* del poliedro: i vertici delle facce (ciascuno comune almeno a tre facce) i *vertici* del poliedro. Sono *consecutive* due facce con uno spigolo comune.

Un poliedro in generale si legge enunciandone i vertici in un certo ordine: questa regola però subisce qualche modificazione, come si vedrà, a seconda dei casi.

491. La superficie d'un poliedro divide lo spazio in due parti, l'una finita, che è il poliedro, e l'altra indefinita; perciò dicesi *chiusa*. Una superficie formata da poligoni piani a due a due consecutivi, ma che non divide lo spazio in due parti, dicesi *poliedrica aperta*.

Diagonale di un poliedro è il segmento che unisce due vertici non appartenenti alla stessa faccia.

Un poliedro è *convesso*, se è tutto da una banda

del piano di ciascuna faccia; diversamente è *concavo*. Considereremo solamente poliedri convessi.

In un poliedro sono ancora da notare i *diedri* che sono contenuti da due facce consecutive, gli *angoloidi* che hanno per vertici i vertici del poliedro. Un poliedro convesso non ha che diedri convessi ed è interno a ciascun diedro ed a ciascun angoloide ⁽¹⁾.

Un poliedro non può aver meno di quattro facce; quando ne ha quattro dicesi *tetraedro*; si dice *pentaedro* se ne ha cinque; *esaedro* se ne ha sei, ecc.

Una faccia di poliedro è *adiacente* ai diedri che hanno per spigoli i suoi lati.

492. Una retta che passa per un punto interno al poliedro ne incontra la superficie in *almeno* due punti situati da bande opposte del primo: se il poliedro è convesso in *non più* di due punti (n. 94).

§ 2.° Piramide e tronco di piramide.

493. Sia un poligono ABCDE (fig. 230) ed un punto V fuori del piano del poligono. Unendo il punto V coi vertici ABCDE del poligono si determina un poliedro, che dicesi *piramide*. Il punto V è il *vertice* (per antonomasia) della piramide, il poligono ABCDE la *base*; le altre facce, cioè i triangoli VAB, VBC,... VEA, le *facce laterali*, e costituiscono la *superficie laterale*.

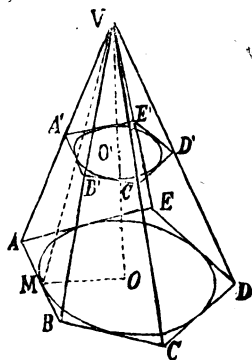


Fig. 230.

⁽¹⁾ Vedasi l' analoga osservazione fatta per gli angoloidi al n. 462 e per i poligoni al n. 92.

Si ottiene una piramide anche tagliando un angolo solido con un piano che incontri tutti gli spigoli.

Altezza della piramide è la distanza del vertice dal piano della base.

Piano diagonale è il piano di due spigoli laterali non appartenenti alla medesima faccia, come VAC, VBE...

La piramide si dice *triangolare*, *quadrangolare*, *pentagonale*... secondo che il poligono base è un triangolo, un quadrangolo, un pentagono... La piramide triangolare è un tetraedro, ed in essa ogni faccia può essere presa come base; il che non è delle altre piramidi.

Per leggere una piramide si enuncia prima il vertice e poi la base.

494. La piramide dicesi *retta*, se nella base si può inscrivere un cerchio e l'altezza cade nel centro di questo. Nella piramide retta le facce laterali hanno eguali altezze, ed i piedi di queste sono i punti di contatto dei lati della base colla circonferenza iscritta.

Infatti si supponga che nel poligono ABCDE (fig. 230) sia iscritto un cerchio il cui centro sia O, ed OV sia l'altezza della piramide VABCDE: sia M il punto di contatto della circonferenza O col lato AB: conducansi VM ed OM. La retta AB è perpendicolare al piano VOM (n. 402) perchè perpendicolare alla OM ed ortogonale ad OV: per conseguenza sarà perpendicolare alla VM: la VM dunque è l'altezza della faccia AVB: così dicasi delle altre.

Queste altezze poi sono eguali tra loro, perchè oblique, condotte da V al piano della base, aventi

proiezioni eguali. Una di esse si dice l'*apotema* della piramide.

495. Sia una piramide retta VABCDE (fig. 230): si faccia rotare la faccia AVB intorno a VB fino a disporsi nel piano della faccia consecutiva BVC; di poi si faccia rotare il piano di queste due intorno a VC fino a disporsi nel piano della terza CVD, e così di seguito fino a ridurre tutte le facce laterali della piramide in un piano. Si ottiene così un settore po-

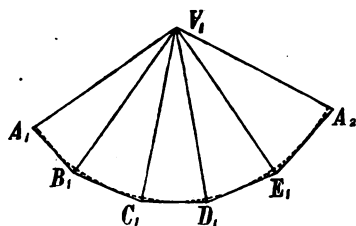


Fig. 231.

ligonale $V_1A_1B_1C_1D_1E_1A_2$ (fig. 231) equivalente alla superficie laterale della piramide, che ha lo stesso apotema e che si dice lo *sviluppo* della detta superficie.

Se la piramide ha la base regolare, lo sviluppo è un settore poligonale regolare.

496. TEOREMA. *La superficie laterale di una piramide retta equivale al rettangolo del semiperimetro della base e dell'apotema.*

Infatti la detta superficie, essendo composta di triangoli della stessa altezza, equivale al triangolo che ha per base la somma delle basi dei detti triangoli (perimetro della base della piramide) e la stessa altezza (apotema della piramide).

AREA LATERALE D'UNA PIRAMIDE RETTA. Indicando con a l'apotema della piramide e con p il perimetro della base, l'area laterale s della piramide è data da

$$s = \frac{pa}{2}.$$

497. TEOREMA. *Le sezioni fatte in un angoloide con piani paralleli (che incontrino tutti gli spigoli) sono poligoni simili; questi sono proporzionali ai quadrati delle loro distanze dal vertice.*

Infatti, se ABCDE, A'B'C'D'E' (fig. 230) sono due poligoni sezioni parallele fatte nell'angoloide V, i loro angoli sono ordinatamente eguali per avere i lati a due a due nella stessa direzione. Di più per la somiglianza delle coppie di triangoli VAB, VA'B';

VBC, VB'C';... i rapporti $\frac{AB}{A'B'} \frac{BC}{B'C'} \dots$ sono eguali

ai rapporti $\frac{VA}{VA'}, \frac{VB}{VB'} \dots$; e questi sono eguali tra loro per la medesima ragione; perciò

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \dots$$

Dunque i due poligoni sono simili.

Di più, se VO, VO' sono le loro distanze dal vertice, dai triangoli simili VOA, VO'A' si ha

$$VO : VO' = VA : VA'$$

e poichè

$$VA : VA' = AB : A'B'$$

si deduce

$$VO : VO' = AB : A'B'$$

ed anche (n. 349, 1.º)

$$VO^2 : VO'^2 = AB^2 : A'B'^2$$

Ma (n. 348)

$$ABCDE : A'B'C'D'E' = AB^2 : A'B'^2$$

dunque

$$ABCDE : A'B'C'D'E' = VO^2 : VO'^2.$$

498. TEOREMA. *Se due piramidi hanno eguale altezza le sezioni parallele alle basi fatte ad egual distanza dal vertice sono proporzionali alle basi.*

Infatti i rapporti di ciascuna base alla corrispondente sezione sono eguali ai rapporti dei quadrati delle loro distanze dai vertici (n. 497); ma queste distanze per ipotesi sono eguali, dunque anche i detti rapporti sono eguali.

In particolare poi: *Se le basi sono equivalenti, anche le sezioni equidistanti dai vertici sono equivalenti.*

499. La sezione $A'B'C'D'E'$ (fig. 230) parallela alla base fatta nella piramide $VABCDE$ divide questa in due parti; l'una è la piramide $VA'B'C'D'E'$: l'altra, cioè il poliedro $ABCDEA'B'C'D'E'$, dicesi *tronco di piramide*. I due poligoni simili sono le *basi* del tronco, la loro distanza l'*altezza*; le altre facce, cioè i trapezi $ABB'A'$, le *facce laterali*, e costituiscono la *superficie laterale*.

500. Se la piramide troncata è retta, il tronco si dice pure *retto*, ed in tal caso le altezze delle facce laterali sono eguali: una di queste si dice l'*apotema* del tronco.

501. Procedendo come si è fatto per lo sviluppo della superficie laterale della piramide retta, si ottiene lo sviluppo di quella del tronco retto, che è la differenza di due settori poligonalali simili (vedasi la figura 232).

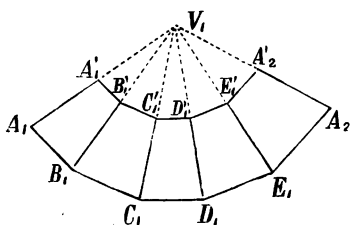


Fig. 232.

502. TEOREMA. *La superficie laterale di un tronco di piramide retta equivale al rettangolo dell'apotema e della semisomma dei perimetri delle basi.*

Infatti la detta superficie essendo composta di

trapezi della stessa altezza; equivale al trapezio che ha per basi la somma delle basi superiori e quella delle inferiori dei detti trapezi (perimetri delle basi del tronco) e la stessa altezza (apotema del tronco).

AREA LATERALE DEL TRONCO DI PIRAMIDE RETTA. Indicando con a l'apotema del tronco e con p e p' i perimetri delle basi, l'area laterale s del tronco è data da

$$s = \frac{(p + p')a}{2}$$

503. TEOREMA. *Due piramidi (o tronchi di piramide) sono eguali, se hanno un diedro eguale compreso da facce eguali e similmente poste, di cui una sia la base; oppure in generale, se hanno un angoloide eguale compreso da facce ordinatamente eguali.*

In particolare: *Due tetraedri sono eguali se hanno un diedro eguale compreso da facce eguali e similmente poste.*

Si dimostra per sovrapposizione.

§ 3.° Prisma e parallelepipedo.

504. Sia un poligono ABCDE (fig. 223) ed una direzione qualsiasi NM non parallela al piano del poligono. Si immaginino i piani passanti per i lati del poligono e paralleli alla MN, i quali si incontreranno secondo le rette AA', BB' ... EE' parallele alla MN. Infine s'immagini un piano parallelo al piano ABC ad intersecare

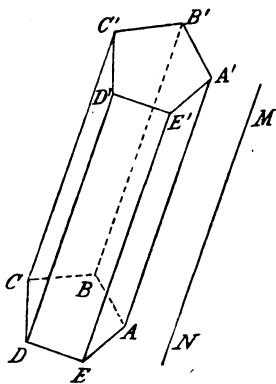


Fig. 223.

questo sistema di piani. La sezione $A'B'C'D'E'$ è un nuovo poligono eguale al primo. Infatti gli angoli dei due poligoni sono eguali per avere i lati ordinatamente nella stessa direzione; ed i lati sono eguali perchè a due a due paralleli e compresi fra rette parallele.

Il solido così determinato dicesi *prisma*; i due poligoni eguali e paralleli le *basi*: le altre facce che sono parallelogrammi, le *facce laterali*; e queste costituiscono la *superficie laterale*.

Altezza del prisma è la distanza dei piani delle due basi.

Piano diagonale è il piano di due spigoli laterali non appartenenti alla medesima faccia, come $AA'C'C$, ecc.

Il prisma si dice *triangolare*, *quadrangolare* ecc... secondo che le basi sono triangoli, quadrangoli, ecc.

Per leggere un prisma si enunciano ordinariamente le due basi: è sufficiente però enunciare una base ed un vertice dell'altra.

505. Il prisma si dice *retto* se gli spigoli laterali (e perciò anche le facce laterali) sono perpendicolari alle basi. Nel prisma retto uno spigolo laterale è anche altezza del prisma.

506. Per quanto si è detto al n. 504 è chiaro che le sezioni fatte in un prisma con piani paralleli sono poligoni eguali. Tra queste ha speciale importanza la sezione fatta con un piano perpendicolare agli spigoli laterali che dicesi *sezione retta*. Nel prisma retto una base è anche sezione retta.

507. Sia un prisma retto $ABCDE, A'$: si immagini di far rotare la faccia $ABB'A'$ intorno a BB' fino a che si disponga nel piano della faccia con-

secutiva $BCC'B'$; di poi si faccia rotare il piano di queste due intorno a CC' fino a disporlo nel piano della terza faccia $CDD'C'$ e così di seguito fino a ridurre tutte le facce laterali del prisma in un piano. Si ottiene così un rettangolo $A_1A_2A'_2A'_1$ (fig. 234) che è equivalente alla superficie laterale del prisma e che si dice lo *sviluppo* di detta superficie.

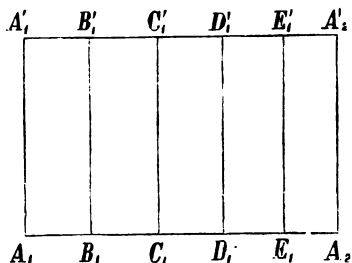


Fig. 234.

Se il prisma dato non è retto, i lati delle due basi essendo obliqui agli spigoli laterali non si dispongono in linea retta e formano invece due spezzate eguali.

508. TEOREMA. *La superficie laterale d'un prisma equivale al rettangolo del perimetro della sezione retta e di uno spigolo laterale.*

Infatti nelle singole facce laterali se si assumono come basi gli spigoli laterali (che sono tutti eguali), le altezze corrispondenti sono i lati della sezione retta: perciò la somma di dette facce equivale al rettangolo ecc...

AREA LATERALE DEL PRISMA. Chiamando a la lunghezza dello spigolo e p il perimetro della sezione retta, l'area laterale s del prisma è

$$s = pa.$$

509. TEOREMA. *Due prismi sono eguali se hanno un angoloide eguale compreso da facce ordinatamente eguali.*

Si dimostra per sovrapposizione.

510. Se la base di un prisma è un parallelo-

grammo, il prisma prende il nome di *parallelepipedo* ⁽¹⁾ (fig: 235). Questo poliedro ha delle proprietà, alcune delle quali presentano una certa analogia con quelle del parallelogrammo.

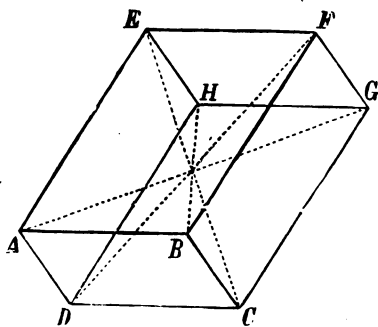


Fig. 235.

e parallele, perciò i dodici spigoli sono a quattro a quattro eguali e paralleli.

Infatti se nel plldo della fig. 235 si assumono come basi ABCD, EFGH, le due facce laterali ADHE, BCGF sono parallele ed eguali per essere AD e DH rispettivamente eguali e paralleli a BC e CG, ed $\widehat{ADH} = \widehat{BCG}$. Così dicasi delle altre due.

Due spigoli paralleli non appartenenti alla stessa faccia, come CD, EF, si dicono *opposti*.

Due facce parallele diconsi *opposte*. Ne consegue che in un parallelepipedo due facce opposte qualsiasi possono essere prese come basi.

2.° I diedri opposti (contenuti cioè da facce opposte) sono eguali

Infatti le loro sezioni rette hanno i lati in direzione opposta, perciò sono eguali.

3.° I triedri opposti (contenuti cioè da facce

(1) Talvolta, per brevità, scriveremo *plldo* invece di *parallelepipedo*.

opposte) sono eguali l'uno all'opposto al vertice dell'altro.

Infatti i loro spigoli sono a due a due in direzione opposte (n. 487, Cor.).

4.^o *Le quattro diagonali s'incontrano in uno stesso punto, nel quale si tagliano in parti eguali.*

Infatti nella fig. 235 le diagonali CE, DF sono nel piano dei due spigoli opposti CD, EF, dunque s'incontrano: di più il quadrangolo CDEF è un pllgr., di cui CE e DF sono le diagonali; perciò queste si dimezzano scambievolmente. Così dicasi delle altre.

OSSERVAZIONE. Si può mostrare senza difficoltà che ogni segmento, che passa pel punto d'incontro delle diagonali e termina alla superficie del pllpdo, è dimezzato in quel punto, il quale perciò dicesi *centro* del pllpdo.

512. **TEOREMA.** *La sezione fatta in un parallelepipedo con un piano che incontri quattro spigoli paralleli è un parallelogrammo* (n. 434).

513. Come un prisma così un parallelepipedo è *retto*, se gli spigoli laterali sono perpendicolari alle basi. Le facce di un pllpdo retto sono adunque quattro rettangoli e due pllgr.

Se anche le basi sono rettangoli (cioè tutte le facce sono rettangoli), il pllpdo dicesi *rettangolo*.

514. **TEOREMA.** *Nel parallelepipedo retto le diagonali sono eguali a due a due; nel pllpdo rettangolo sono eguali e reciprocamente.*

Se le facce sono quadrati, il pllpdo rettangolo si dice *cubo*.

515. Se le facce d'un parallelepipedo sono rombi eguali, esso prende il nome di *romboedro*.

Vi sono due specie di romboedri. Se sopra gli spigoli d'un triedro A (fig. 236 a) a facce eguali ed acute si prendono tre segmenti eguali AB, AC, AD si determina un romboedro ABECDFGH che ha il triedro in A ed il suo opposto in G che sono eguali; gli altri sei triedri, pure eguali tra loro, hanno una faccia acuta e due ottuse e supplementari della prima. Questo romboedro si dice *acuto*.

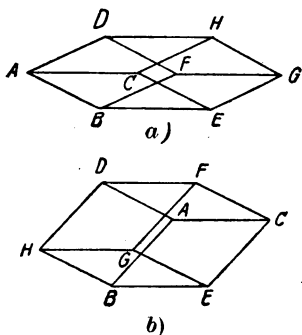


Fig. 236.

Se si fanno invece le stesse costruzioni sopra un triedro colle facce eguali, ma ottuse (fig. 236 b) (minori naturalmente di 120° (n. 476)) si ottiene ancora un romboedro che ha due triedri opposti eguali colle facce ottuse; gli altri sei triedri, pure eguali tra loro, hanno una faccia ottusa e due acute e supplementari della prima. Tale romboedro si dice *ottuso*.

Se il triedro è a facce rettangolari il romboedro è *cubo*.

§ 4.° Poliedri regolari.

516. Un poliedro si dice *regolare*, se tanto le facce che gli angoloidi sono regolari ed eguali. Dopo quanto si è detto al n. 489 non sono possibili che cinque poliedri regolari. Questi esistono di fatto e sono i seguenti:

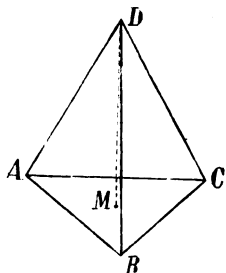


Fig. 237.

sono triangoli equilateri e i cui angoloidi sono triedri regolari ed eguali. Esso ha quattro vertici e sei spigoli.

2.° *Esaedro regolare o cubo*. Sia ABCD (fig. 238)

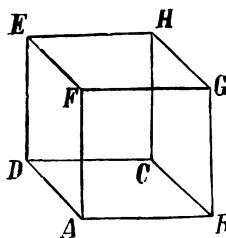


Fig. 238.

Unendo i quattro punti E, F, G, H si ha un esaedro, le cui facce sono quadrati e i cui angoloidi sono triedri trirettangoli. Esso ha 8 vertici e 12 spigoli.

3.° *Ottaedro regolare*. Sia ABCD un quadrato

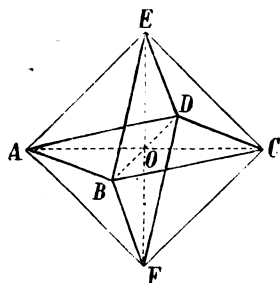


Fig. 239.

(fig. 239): dal punto O d'incontro delle diagonali si elevi la perpendicolare al piano del quadrato e su di essa si prendano da ambe le bande i segmenti OE, OF eguali alla metà della diagonale. Unendo E ed F con A, B, C e D si ha un ottaedro, le cui facce sono triangoli equi-

lateri, come è manifesto, e di cui gli angoloidi sono tetraedri regolari ed eguali. Infatti, se si fa rotare la figura intorno ad EF di un angolo retto, i punti A, B, C, D si scambiano successivamente di posizione e la figura coincide con sè stessa; lo stesso avviene colla rotazione intorno ad AC ed a BD, il che prova appunto che gli angoloidi sono regolari ed eguali. Esso ha 6 vertici e 12 spigoli.

4.° *Dodecaedro regolare*. Sia ABCDE (fig. 240) un pentagono regolare. Col vertice in A s'immagini

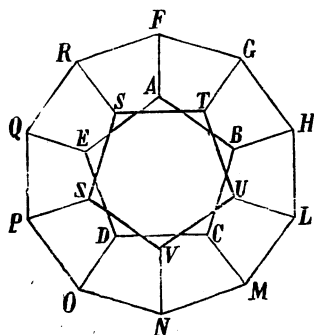


Fig. 240.

costruito il triedro regolare ABEF (il che è possibile) e si completi il pentagono regolare BAFGH: allora il triedro che risulta in B, cioè BAHG, è eguale a quello in A per avere il diedro $\overline{AB}$ comune compreso da facce eguali. Si completi il pentagono regolare BHLMC; così con-

tinuando si formano intorno ai vertici A, B, C, D, E cinque triedri regolari eguali e si ottiene una superficie poliedrica regolare aperta composta di sei pentagoni (fatta a guisa di cestino con cinque punte G, L, N, P, R). Notisi che il triedro in F, cioè FRAG (del quale due sole facce appartengono alla superficie descritta), è eguale a quello in A, per avere il diedro $\overline{AF}$ comune compreso da facce eguali: così dei triedri in H, M, O, Q. Sopra un altro pentagono eguale al dato si costruisca una superficie eguale alla prima, e si sovrapponga alla medesima, ma rovesciata: per quanto si è detto, si

potrà fare in modo che le cinque punte della seconda cadano nei punti F, H, M, O, Q e reciprocamente. Si verrà così a chiudere un dodecaedro, le cui facce sono pentagoni regolari, e gli angoloidi sono triedri regolari eguali. Esso ha 20 vertici e 30 spigoli.

5.° *Icosaedro regolare*. Sia ABCDE (fig. 241) un pentagono regolare: dal centro O del cerchio iscritto si elevi la OF perpendicolare al piano del pentagono e nel piano AOF, centro in A e raggio AB, si intersechi la OF in F. Unendo F coi vertici del pentagono si ha intanto una piramide, le cui facce laterali sono triangoli equilateri e l'angoloide pentaedro in F è regolare.

S'immagini ora in ciascun vertice del pentagono un angoloide eguale a quello in F: i due angoloidei in A ed in B, avendo comuni lo spigolo AB e la faccia ABF, avranno in comune anche il diedro $\overline{AB}$, perciò gli spigoli AG, BG per essere in uno stesso piano s'incontrano in G, formando il triangolo

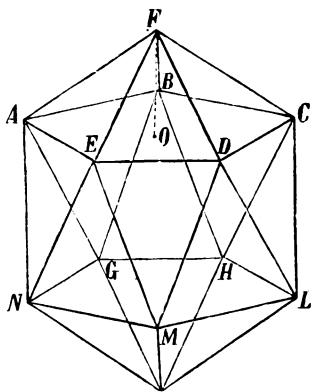


Fig. 241.

equilatero ABG; così dicasi per gli spigoli degli altri angoloidei, che formeranno i triangoli equilateri BCH, CDL, DEM, EAN. Si è ottenuta così una superficie poliedrica regolare di 10 facce; la quale con una rotazione intorno ad OF, fino a che i vertici del pentagono ABCDE cadano ciascuno nella posizione del successivo, coincide colla posi-

zione iniziale, il che prova che i punti G, H, L, M, N sono vertici di un pentagono regolare eguale al primo. Ciò posto, partendo da un altro pentagono eguale al dato si costruisca una superficie eguale alla prima: dopo quanto si è detto si potrà disporla in modo che il suo pentagono coincida con GHLMN e i 5 vertici analoghi ai vertici G, H, L, M, N della prima cadano in A, B, C, D, E. Si chiuderà così un icosaedro, le cui facce sono triangoli equilateri e gli angoloidi sono pentaedri regolari ed eguali. Esso ha 12 vertici e 30 spigoli.

§ 5. Alcuni teoremi sui poliedri.

517. TEOREMA. *In una superficie poliedrica aperta se si indicano rispettivamente con f , v , s i numeri delle facce, dei vertici e degli spigoli si ha*

$$f + v - s = 1.$$

Infatti sopprimendo nella superficie poliedrica una di quelle facce, che ha parte del contorno in comune col contorno della superficie stessa, posto che questa faccia abbia k vertici liberi (cioè non comuni con altre facce), f diminuisce di 1, v di k ed s di $k + 1$; di guisa che la differenza $f + v - s$ non varia. Sopprimendo così successivamente le facce della superficie, ci si riduce ad una sola faccia; nel qual caso $f = 1$ e $v = s$, ed $f + v - s = 1$. Dunque anche per la superficie data si ha la stessa relazione.

518. TEOREMA (di Eulero⁽¹⁾). *In un poliedro, cioè in una superficie poliedrica chiusa, si ha*

$$f + v - s = 2$$

(dove f , v , s hanno lo stesso significato che al teorema precedente).

(¹) Leonardo Eulero, celebre geometra, nato a Riehen (Basilea) nel 1707. Fu professore a Pietroburgo dal 1733 al 1741, poi a Berlino dal 1741 al 1766 e di nuovo a Pietroburgo fino alla morte avvenuta nel 1783.

Infatti sopprimendo una faccia si è ridotti al caso precedente, e allora si ha

$$(f - 1) + v - s = 1$$

da cui

$$f + v - s = 2$$

519. TEOREMA. *Il numero degli angoli delle facce di un poliedro è eguale a $2s$.*

Infatti, siccome in ogni faccia il numero degli angoli è eguale a quello dei lati, così si possono contare questi invece degli angoli: ma così facendo ogni lato vien contato due volte, perchè, come spigolo del poliedro, è comune a due facce: dunque il numero degli angoli è $2s$. Alla stessa conclusione si giunge considerando gli angoli come facce degli angoloidi.

520. TEOREMA. *La somma degli angoli delle facce di un poliedro è eguale a $(v-2) 4\widehat{R}$.*

Infatti indichiamo con $n_1, n_2, n_3, \dots, n_f$ i numeri dei lati (o degli angoli) delle successive facce d'un poliedro. La somma degli angoli delle facce stesse è data da (n. 98)

$$(2n_1\widehat{R} - 4\widehat{R}) + (2n_2\widehat{R} - 4\widehat{R}) + \dots + (2n_f\widehat{R} - 4\widehat{R})$$

ossia da

$$(n_1 + n_2 + \dots + n_f) 2\widehat{R} - 4f\widehat{R}$$

ma la somma $n_1 + n_2 + \dots + n_f = 2s$, perchè ciascuno spigolo è contato due volte; perciò sostituendo la somma diventa $4s\widehat{R} - 4f\widehat{R}$, ossia $(s-f) 4\widehat{R}$. Ma pel teorema di Eulero $s-f = v-2$: dunque finalmente sostituendo si ha $(v-2) 4\widehat{R}$.

OSSERVAZIONE. La somma degli angoli di un poligono di v vertici è (n. 98) $(v-2) 2\widehat{R}$; perciò si può dire che: *la somma degli angoli d'un poliedro è doppia della somma degli angoli d'un poligono che ha lo stesso numero di vertici.*

§. 6.º Figure eguali ed eguali opposte.

521. Sia ABCD un tetraedro (fig. 242): si costruisca (in un piano qualunque) il triangolo A'B'C' eguale al triangolo ABC; e ritenendo A'B' come spigolo e la falda A'B'C' come faccia, si costruiscano i due diedri eguali al diedro DABC (n. 422). Sulle

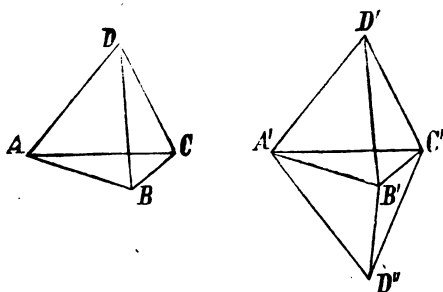


Fig. 242.

due facce non comuni dei due diedri e sopra $A'B$ come omologo di AB (e precisamente facendo corrispondere A' ad A e B' a B) si costruiscano i triangoli $A'B'D'$, $A'B'D''$ eguali ad ABD . Unendo D' e D'' con C' si determineranno due tetraedri $(ABCD)'$, $A'B'C'D''$ i quali, come facilmente si verifica, hanno facce e diedri ordinatamente eguali, ma i triedri dell'uno eguali agli opposti dell'altro. Se si trasporta ora questa figura in modo che il triangolo $A'B'C'$ venga a coincidere col suo eguale ABC , uno dei due tetraedri costruiti trovasi dalla stessa banda del tetraedro $ABCD$, anzi coincide con esso, sia questo $A'B'C'D'$; l'altro invece cade dalla banda opposta.

Per distinguere i due casi, mentre si dice che i tetraedri $ABCD$, $A'B'C'D'$ sono eguali, si dirà che i tetraedri $ABCD$, $A'B'C'D''$ sono *eguali opposti* ⁽¹⁾.

La stessa cosa può ripetersi per due piramidi

(1) È degno di nota il fatto che mentre nel piano le figure eguali inversamente si possono far coincidere, nello spazio ciò non si verifica per le figure eguali-opposte, che sotto un certo aspetto corrispondono alle prime.

poligonali, per due prismi ed anche per due poliedri qualunque.

Vi sono però dei poliedri che, se sono eguali sono anche eguali-opposti: così ad es. due piramidi rette o due prismi retti a base regolare, due parallelepipedi rettangoli, due poliedri regolari, ecc.

522. Passando ora al concetto generale di figure eguali si dirà che: *due figure sono eguali (od eguali opposte) se a ciascun punto dell'una corrisponde uno ed un sol punto dell'altra in modo che quattro punti dell'una ed i quattro corrispondenti dell'altra sieno vertici di tetraedri eguali (od eguali opposti). E se quattro punti dell'una figura sono in un piano, i quattro corrispondenti dell'altra sono in un piano; e le quattro coppie di punti sono vertici di due quadrilateri eguali.*

Questa definizione è giustificata dal seguente

TEOREMA. *Dati due triangoli eguali ABC , $A'B'C'$ (fig. 243) se ai punti $D, E, F, \dots$ dello spazio, che si considerano facenti parte d'una figura insieme ad ABC , si fanno corrispondere rispettivamente i punti $D', E', F', \dots$ che si considerino facenti*

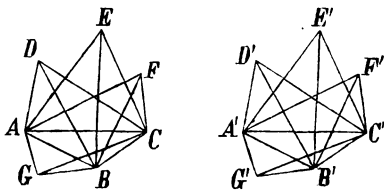


Fig. 243.

parte di un'altra figura insieme ad $A'B'C'$ e tali che le coppie di tetraedri $ABCD, A'B'C'D'$; $ABCE, A'B'C'E'$; $ABCF, A'B'C'F'$;.... sieno eguali e similmente posti, le due figure sono eguali.

Se le coppie suddette di tetraedri sono eguali-opposte, quattro coppie qualunque di punti corrispondenti sono vertici di tetraedri eguali-opposti, e le due figure sono eguali-opposte.

Infatti sovrapponendo nel primo caso l'una figura all'altra in modo che i triangoli ABC , $A'B'C'$ coincidano, anche le coppie di tetraedri eguali, non che le due figure coincideranno.

Nel secondo caso si può facilmente dimostrare che i segmenti che uniscono due coppie di punti corrispondenti sono eguali, che tre coppie di punti corrispondenti sono vertici di triangoli eguali, e che quattro coppie di punti corrispondenti sono vertici di tetraedri che hanno le facce eguali e perciò i diedri compresi eguali, ma i triedri corrispondenti l'uno eguale all'opposto dell'altro, perciò i tetraedri sono eguali-opposti. Che se infine quattro punti d'una figura sono vertici d'un quadrilatero piano, i corrispondenti dell'altra sono vertici di un quadrilatero eguale al primo.

523. Data adunque una figura $ABCDEF...$ (figura 243) il problema di costruire una figura eguale alla data sopra un segmento $A'B'$ corrispondente ad un segmento eguale AB della figura stessa, è ridotto prima a costruire un triangolo $A'B'C'$ eguale al triangolo ABC , di poi sopra $A'B'C'$ una serie di tetraedri eguali e similmente posti ai tetraedri $ABCD$, $ABCE,...$

CAPITOLO III.

I CORPI ROTONDI

§ 1.° La superficie conica, il cono ed il tronco di cono.

524. Una retta, che si muove rotando intorno ad uno dei suoi punti ed appoggiandosi ad una linea fissa, genera una superficie che dicesi *conica*.

Il punto fisso è il *vertice*, la linea fissa la *direttrice*, la retta mobile la *generatrice*.

La superficie conica è costituita da due parti distinte (generalmente) o *falde*, generate dai due raggi in cui la generatrice è divisa dal vertice. Noi considereremo ordinariamente una delle falde.

Se la direttrice è una retta, la superficie conica è manifestamente un piano (fig. 196 a).

Se la direttrice è una circonferenza, la superficie conica dicesi *circolare*; se oltre a ciò il vertice è sulla perpendicolare al piano della circonferenza condotta pel centro, la superficie dicesi *retta* o *rotonda*.

525. La generatrice di una superficie conica rotonda forma evidentemente angoli eguali colla detta perpendicolare nelle sue diverse posizioni; di guisa che si può anche dire che:

Se un angolo acuto $\widehat{O\dot{V}A}$ (fig. 244) ruota intorno

ad un lato VO, il lato mobile genera una superficie conica rotonda, di cui il lato fisso VO dicesi l'asse.

526. TEOREMA. *Le sezioni fatte in una superficie conica con piani paralleli sono figure simili.*

In particolare:

Le sezioni fatte in una superficie conica circolare con piani paralleli alla direttrice sono circonferenze.

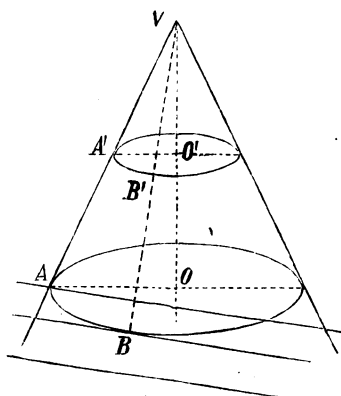


Fig. 244.

ossia la sezione è una circonferenza, di centro O'.

Analogamente si dimostra il teorema generale tenendo presente la definizione di figure piane simili data al n. 335.

Una qualunque di tali sezioni può esser presa come direttrice.

527. Una sezione fatta in una superficie conica circolare con un piano parallelo alla direttrice limita un solido, che dicesi *cono circolare*. Il cono è *retto* o *rotondo* se la superficie conica è rotonda, diversamente è *obliquo*. Il cerchio sezione è la *base* del cono, la sua distanza dal vertice l'*altezza* (nel cono

Infatti se O'A'B'... (figura 244) è una sezione parallela alla direttrice OAB.... di una superficie conica circolare, dalla somiglianza dei triangoli VOA, VO'A'; VOB; VO'B'....; si ha $VO:VO' = OA:O'A' = OB:O'B' = \dots$; ma

$OA = OB = \dots$,
dunque

$O'A' = O'B' = \dots$

retto è l'asse): la parte di superficie conica che lo limita, la *superficie laterale*.

528. Un cono retto si può supporre generato da un triangolo rettangolo, come VOA (fig. 244), che ruota intorno ad un cateto VO: l'altro cateto genera la base e l'ipotenusa la superficie laterale: l'ipotenusa dicesi anche *lato* od *apotema* del cono.

529. TEOREMA. *Due superficie coniche rette (due coni retti) sono eguali, se sono eguali le figure generatrici.*

530. Un cono ⁽¹⁾ è determinato dal triangolo generatore: perciò si dirà *il cono generato dal triangolo VOA* o semplicemente *il cono VOA*.

531. Se la sezione fatta in un cono con un piano passante per l'asse è un triangolo equilatero (cioè se il diametro della base è eguale al lato), il cono dicesi *equilatero*.

532. Un punto è *interno* od *esterno* ad una superficie conica, se è interno od esterno alla sezione parallela alla direttrice fatta con un piano passante per quel punto.

533. *Un piano che passa pel vertice della superficie conica può avere con questa o nessun altro punto comune, oppure una generatrice (proiezione dell'asse sul piano) o infine incontrarla secondo due generatrici, secondo che l'angolo dell'asse col piano è maggiore, eguale o minore dell'angolo generatore della superficie.*

Nel primo caso il piano si dice *esterno* alla superficie, nel secondo *tangente*, nel terzo *secante*.

(1) Da questo punto in avanti s'intenderà sempre che si tratta di superficie conica circolare retta e di cono retto, a meno che non sia detto diversamente.

Un piano che non passa pel vertice, se è parallelo al piano della direttrice, taglia, come si è detto, la superficie conica secondo una circonferenza; se obliquo, secondo linee che non è opportuno qui di studiare ⁽¹⁾.

534. Una retta che passa pel vertice d'una superficie conica, si dice *esterna*, oppure giace sulla superficie, o si dice *interna*, secondo che l'angolo che essa forma coll'asse è maggiore, eguale o minore dell'angolo che la generatrice dalla superficie fa coll'asse stesso.

Una retta che non passa pel vertice può avere comune colla superficie conica o nessun punto, o un punto, o due punti. Nel primo caso si dice *esterna*, nel secondo *tangente*, nel terzo *segante*.

Si verifica facilmente, considerando il piano della retta stessa e del vertice.

535. Due sezioni fatte in una superficie conica circolare con piani paralleli alla direttrice limitano un solido che dicesi *tronco di cono circolare*. Il tronco è *retto*, se la superficie conica è retta, diversamente è *obliquo*. I cerchi sezione sono le *basi* del tronco, la loro distanza l'*altezza* (nel tronco retto è l'asse), la parte di superficie conica che lo limita

(1) Se l'angolo dell'asse col piano è maggiore dell'angolo generatore della superficie, il piano incontra tutte le generatrici su una stessa falda e la sezione è una linea chiusa detta *ellisse*: se il primo angolo è eguale al secondo, il piano è parallelo ad una generatrice e la sezione è una linea aperta (indefinita) detta *parabola*: se il primo angolo è minore del secondo (oppure il piano è parallelo all'asse), la sezione è una linea aperta, composta di due rami distinti (perchè in questo caso il piano incontra ambe le falde della superficie), detta *iperbola*.

la *superficie laterale*. Nel tronco retto dicesi *apotema* o *lato* la parte di generatrice compresa fra le basi.

Un tronco di cono retto si può supporre generato da un trapezio rettangolo, come AOO'A', (figura 244), che ruota intorno al lato perpendicolare alle basi.

536. Una piramide è *iscritta* in un cono, se ha lo stesso vertice e la base è iscritta in quella del cono; questo si dice *circoscritto* alla piramide. Se il cono è retto, gli spigoli laterali della piramide iscritta sono lati del cono.

537. Una piramide è *circoscritta* ad un cono, se ha lo stesso vertice e la sua base è circoscritta alla base del cono: questo si dice *iscritto* nella piramide. Le facce laterali della piramide circoscritta sono tangenti alla superficie conica, e se il cono è retto, le generatrici di contatto sono apotemi della piramide.

538. Così pure un tronco di piramide si dice *iscritto* o *circoscritto* ad un tronco di cono, secondo che le sue basi sono iscritte o circoscritte a quelle del tronco di cono. Analoghe osservazioni a quelle fatte più sopra circa gli spigoli e le facce laterali dei detti tronchi.

È chiaro che quando si può iscrivere o circoscrivere un cerchio alla base di una piramide (o alle basi di un tronco di piramide), si può iscrivere o circoscrivere alla medesima un cono (o al tronco di piramide un tronco di cono).

§ 2.° La superficie cilindrica ed il cilindro.

539. Una retta, che si muove conservandosi parallela alla posizione iniziale ed appoggiandosi

ad una linea fissa, genera una superficie, che dicesi *cilindrica*. La linea fissa è la *direttrice*, la retta mobile la *generatrice*.

Se la direttrice è una retta, la superficie cilindrica è manifestamente un piano (fig. 196, b).

Se la direttrice è una circonferenza, la superficie cilindrica dicesi *circolare*; se oltre a ciò la generatrice è perpendicolare al piano della direttrice, la superficie dicesi *retta* o *rotonda*.

540. Se dal centro della direttrice si immagina la perpendicolare al suo piano, è chiaro che la generatrice della superficie cilindrica rotonda nelle sue diverse posizioni si conserva parallela a questa retta e ad egual distanza da essa: di guisa che si può dire che:

Se la figura formata da due parallele, come

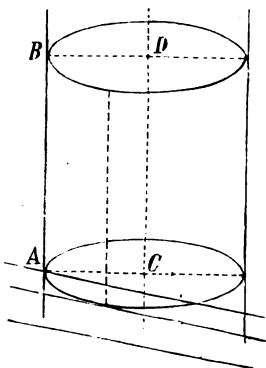


Fig. 245.

AB, CD (fig. 245) ruota intorno ad una di esse, per es. CD, la retta mobile genera una superficie cilindrica rotonda, di cui la retta fissa CD dicesi *l'asse*, e la distanza della generatrice dall'asse il *raggio*.

541. TEOREMA. *Le sezioni fatte in una superficie cilindrica con piani paralleli sono figure eguali direttamente.*

Si verifica senza difficoltà tenendo presente il n. 110 ed osservando che le singole coppie di punti corrispondenti sono sulle generatrici.

Una di queste sezioni può esser presa come direttrice.

In particolare:

Le sezioni fatte in una superficie cilindrica circolare con piani paralleli alla direttrice sono circonferenze eguali alla direttrice stessa.

542. Due di queste sezioni limitano un solido, che si dice il *cilindro circolare*. Il cilindro è *retto* o *rotondo*, se la superficie cilindrica è rotonda, diversamente è *obliquo*.

I cerchi sezione sono le *basi* del cilindro, la loro distanza l'*altezza* (nel cilindro retto è l'asse); la parte di superficie cilindrica che lo limita la *superficie laterale*.

543. Un cilindro rotondo si può supporre generato da un rettangolo come ACDB (fig. 245) che ruota intorno ad un lato CD: i due lati AC, BD generano le basi; il lato AB, opposto all'asse, la superficie laterale: questo dicesi anche il *lato* del cilindro.

544. TEOREMA. *Due superficie cilindriche rette (due cilindri retti) sono eguali, se sono eguali le figure generatrici.*

545. Un cilindro ⁽¹⁾ è determinato dal rettangolo generatore, perciò si dirà *il cilindro generato dal rettangolo* CDBA, o semplicemente *il cilindro* CDBA.

546. Se la sezione fatta in un cilindro con un piano passante per l'asse è un quadrato (cioè se il diametro della base è eguale al lato), il cilindro dicesi *equilatero*.

547. TEOREMA. *La superficie cilindrica è il luogo*

(1) Da questo punto in avanti s'intenderà sempre che si tratta di superficie cilindrica circolare retta e di cilindro retto, a meno che non sia detto diversamente.

dei punti che hanno da una retta data (l'asse) una distanza data (il raggio della superficie cilindrica).

548. Un punto è *interno* o *esterno* alla superficie cilindrica, secondo che la sua distanza dall'asse è minore o maggiore del raggio della superficie.

549. *Un piano parallelo all'asse d'una superficie cilindrica può avere con questa o nessun punto comune, o una generatrice (proiezione dell'asse sul piano) o incontrarla secondo due generatrici, secondo che la distanza dell'asse dal piano è maggiore, eguale o minore del raggio della superficie.*

Nel primo caso il piano dicesi *esterno* alla superficie cilindrica, nel secondo *tangente*, nel terzo *secante*.

Un piano non parallelo all'asse, se parallelo alla direttrice, taglia la superficie cilindrica secondo una circonferenza; se obliquo, secondo linee che non è qui opportuno di studiare ⁽¹⁾.

550. Una retta parallela all'asse d'una superficie cilindrica si dice *esterna*, oppure giace sulla superficie, od è *interna*, secondo che la sua distanza dall'asse è maggiore, eguale o minore del raggio della superficie.

Una retta non parallela all'asse può avere colla superficie cilindrica o nessun punto, od un punto, o due punti comuni, secondo che la sua distanza dall'asse è maggiore, eguale o minore del raggio della superficie. Nel primo caso si dice *esterna*, nel secondo *tangente*, nel terzo *secante*.

Si verifica facilmente considerando il piano passante per la retta e parallelo all'asse.

551. Un prisma è *iscritto* in un cilindro, se le

(1) Queste linee sono ellissi (vedi nota a pag. 374).

sue basi sono iscritte in quelle del cilindro: e questo si dice *circoscritto* al prisma. Gli spigoli laterali del prisma iscritto sono lati del cilindro.

552. Un prisma è *circoscritto* ad un cilindro, se le sue basi sono circoscritte a quelle del cilindro; e questo si dice *iscritto* nel prisma. Le facce laterali del prisma circoscritto sono tangenti alla superficie laterale del cilindro.

È chiaro che quando si può iscrivere o circoscrivere un cerchio alle basi di un prisma, si può iscrivere o circoscrivere a questo un cilindro.

§ 3.° La superficie sferica e la sfera. — Superficie e solidi di rotazione.

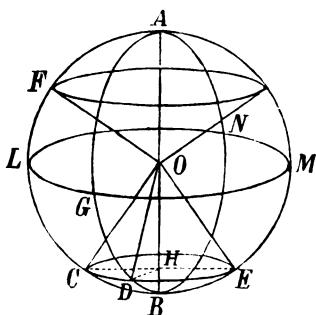


Fig. 246.

553. Una semicirconferenza, che ruota intorno al suo diametro AB (fig. 246) fino a tornare nella posizione iniziale, genera una superficie che dicesi *sferica*.

Il centro O e il raggio OA della semicirconferenza si dicono il *centro* ed il *raggio* della superficie sferica.

Dal modo stesso col quale è generata si comprende come la detta superficie è il luogo dei punti che hanno da un punto fisso (il centro) distanze eguali ad un segmento dato (il raggio): in altre parole se da un punto partono quanti si vogliano segmenti eguali, i loro estremi si trovano sopra

una superficie sferica, di cui quel punto è il centro ed uno dei segmenti il raggio.

554. La superficie sferica è chiusa e limita un solido che dicesi *sfera*.

555. TEOREMA. *Due superficie sferiche (due sfere) di raggi eguali sono eguali.*

Infatti è chiaro che facendo coincidere i loro centri, anche le superficie coincidono. Tale coincidenza si può ottenere in infiniti modi diversi: ne consegue che, se si fa rotare una superficie sferica intorno al suo centro, i suoi punti si muovono sulla superficie stessa, e questa conserva la sua posizione nello spazio. Si dice allora che la superficie sferica *scorre su sè stessa*.

556. Una superficie sferica (una sfera) è determinata, dato il centro ed il raggio: perciò si dirà *la superficie sferica di centro O e raggio OA* , o più brevemente *la superficie sferica OA* .

557. Dicesi *diametro* ogni segmento che passa pel centro e termina alla superficie stessa. Tutti i diametri sono divisi per mezzo dal centro e sono eguali.

558. Un piano che passa pel centro della sfera, la taglia secondo un cerchio che ha lo stesso centro e lo stesso raggio della sfera e che dicesi *cerchio massimo* (la circonferenza, *circonferenza massima*). I cerchi massimi sono eguali. Un cerchio massimo divide la sfera (la superficie sferica) in due parti eguali dette *emisferi*: si verifica per sovrapposizione. Perciò il piano di un cerchio massimo dicesi anche *piano diametrale*.

559. Un punto dicesi *esterno* od *interno* ad una superficie sferica, secondo che la sua distanza dal centro è maggiore o minore del raggio.

560. TEOREMA. *Una retta ed una superficie sferica possono avere o nessun punto, o un punto, o due punti comuni, secondochè la distanza della retta dal centro della superficie sferica è maggiore, eguale o minore del raggio.*

Nel primo caso la retta dicesi *esterna* alla superficie sferica, nel secondo *tangente*, nel terzo *segante*.

Si verifica considerando la sezione fatta col piano diametrale condotto per la retta.

561. TEOREMA. *Un piano ed una superficie sferica possono avere o nessun punto, od un punto comune, o incontrarsi secondo una circonferenza, secondo che la distanza del piano dal centro della superficie sferica è maggiore, eguale o minore del raggio.*

Nel primo caso il piano è *esterno* alla superficie sferica, nel secondo *tangente*, nel terzo *segante*; e la circonferenza intersezione dicesi *circonferenza* (o cerchio) *minore*.

Infatti un piano condotto per la detta distanza taglia la superficie sferica ed il piano rispettivamente secondo una circonferenza massima ed una retta; e questa figura rotando intorno alla distanza stessa genera nuovamente la superficie sferica ed il piano. Ora nel primo caso la retta è esterna alla circonferenza massima, nel secondo è tangente, nel terzo è segante e la corda intercetta (essendo bisecata ad angolo retto dall'asse di rotazione) genera un cerchio che ha per centro il piede della distanza e per raggio la proiezione sul piano del raggio della sfera che ha per estremo uno degli estremi della corda intercetta.

OSSERVAZIONE. L'ultimo caso del teorema si usa

anche enunciarlo dicendo: *Ogni sezione piana fatta in una sfera è un cerchio.*

COROLLARIO. *Per un punto di una superficie sferica passa un piano tangente (il piano perpendicolare al raggio di quel punto) ed uno solo: esso è il luogo delle infinite tangenti alla superficie in quel punto.*

562. TEOREMA. *Per un punto esterno ad una superficie sferica passa una infinità di rette e piani tangenti.*

Sia una superficie sferica di centro O ed un punto A esterno (fig. 247); s'immagini un piano diametrale passante per A , e da A la AT tangente alla circonferenza massima sezione. Facendo rotare la figura intorno ad OA , la circonferenza massima genera la superficie sferica, e la AT in ogni sua posizione è tangente alla superficie stessa. Il luogo delle dette tangenti è la superficie conica generata dalla AT , e quello dei punti di contatto la circonferenza generata da T . Ogni piano poi tangente a questa superficie conica, lo è anche alla sferica.

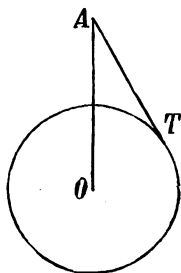


Fig. 247.

563. TEOREMA. *Per una retta esterna ad una superficie sferica passano due piani tangenti e due soli.*

Sia la superficie sferica di centro O e la retta AB esterna (fig. 248): si

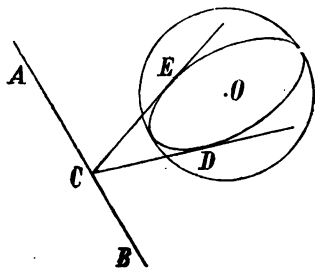


Fig. 248.

conduca da O il piano perpendicolare alla AB , che

taglierà la superficie sferica secondo una circonferenza massima e la AB in un punto C: da C si conducano le tangenti CD, CE alla circonferenza massima: i due piani ABD, ABE sono tangenti alla superficie sferica ed essi soli.

564. 1.° TEOREMA. *Due superficie sferiche non hanno punti comuni, se la distanza dei loro centri è maggiore della somma o minore della differenza dei raggi.*

Nel primo caso sono *esterne* l'una all'altra, nel secondo l'una è *interna* all'altra.

2.° TEOREMA. *Due superficie sferiche hanno un punto comune posto sulla retta dei centri, se la distanza dei centri è eguale alla somma o alla differenza dei raggi.*

Le due superficie sferiche si dicono *tangenti*, *esternamente* nel primo caso, perchè esterne l'una all'altra; *internamente* nel secondo, perchè una è interna all'altra, salvo s'intende il punto comune.

3.° TEOREMA. *Due superficie sferiche s'incontrano secondo una circonferenza, se la distanza dei centri è minore della somma e maggiore della differenza dei raggi.*

Le due superficie si dicono *seganti* e ciascuna ha una parte interna ed una esterna rispetto all'altra.

Infatti un piano condotto per la retta dei centri taglia le due superficie sferiche secondo due circonferenze massime: e se si fa rotare la figura intorno alla retta dei centri, si riproducono le due superficie sferiche. Ora nel primo caso le circonferenze sono, o esterne l'una all'altra, o l'una è interna all'altra (n. 143, 1.° e 2.°); nel secondo sono tangenti esternamente o internamente (n. 144, 1.° e 2.°);

nel terzo sono seganti (n. 145), e la corda comune, bisecata ad angolo retto dalla retta dei centri, genera un cerchio, il cui piano è perpendicolare alla retta dei centri.

565. La superficie generata da una linea che ruota intorno ad un asse, non che il solido da essa limitato, si dicono di *rotazione*. Tali sono le superficie coniche e cilindriche circolari rette e le superficie sferiche. Solidi di rotazione sono il cono, il cilindro retti e la sfera: questi si dicono anche *corpi rotondi*.

566. Le sezioni fatte con piani passanti per l'asse si dicono *meridiani*, e sono tutte eguali; quelle fatte con piani perpendicolari all'asse diconsi *paralleli*, e sono circonferenze col centro sull'asse. Il massimo parallelo (quando esiste) dicesi *equatore*.

567. La superficie sferica ha infiniti assi di rotazione, che sono i suoi diametri. Fissato un diametro particolare AB (fig. 246) come asse, i suoi estremi diconsi i *poli*. I punti di un parallelo hanno tutti eguali distanze da ciascun polo. Così per il parallelo CDE (fig. 246) si ha

$$CA = DA = EA....$$

ed anche

$$CB = DB = EB =....:$$

tali segmenti diconsi *distanze polari*, gli archi di meridiano corrispondenti *distanze sferiche* ⁽¹⁾. Ogni parallelo ha due poli che sono gli estremi del dia-

(1) Si dimostra (il che non è qui il caso di esporre) che la minima delle linee giacenti sopra una superficie sferica e che uniscono due punti della medesima è il minore dei due archi di circonferenza massima terminati agli stessi punti: donde il nome di *distanza sferica*.

metro sferico perpendicolare al suo piano e due distanze polari e sferiche: ordinariamente però si considera la minore delle due.

L'equatore è equidistante dai due poli.

Dopo ciò è chiaro come sulla superficie sferica si possa descrivere una circonferenza con un compasso a gambe incurvate facendo centro in un polo e con raggio eguale alla distanza polare: da ciò il nome di *centri sferici* ai poli.

568. Due semi-circonferenze massime col diametro in comune, dividono la superficie sferica in due parti, dette *fusi* od *angoli sferici*; i loro semicerchi dividono la sfera in due parti, dette *spicchi* od *unghie sferiche*. Ogni spicchio è limitato da un fuso corrispondente che dicesi *la base dello spicchio*.

Il fuso e lo spicchio si leggono come il diedro compreso dai semicerchi, leggendo però gli estremi dell'arco equatoriale e del diametro: così si dice il fuso e lo spicchio NABM (fig. 246).

569. Se si immagina che la falda di piano ANB ruoti intorno ad AB fino a coincidere coll'altra falda AMB, è chiaro che essa genera il diedro $\overline{\text{NABM}}$, il raggio indefinito ON l'angolo corrispondente $\widehat{\text{NOM}}$ (n. 421): insieme a questo il semicerchio ANB genera lo spicchio NABM, la semicirconferenza $\widehat{\text{ANB}}$ il fuso NABM, e finalmente il punto N l'arco equatoriale $\widehat{\text{NM}}$ (equatoriale, perchè si considera come meridiano il cerchio che ruota).

Ciò stabilisce non solo tra i diedri e le loro sezioni rette, ma anche tra questi, gli spicchi, i fusi e gli archi equatoriali una corrispondenza di posizione e di estensione analoga a quella osservata fra gli angoli al centro, gli archi ed i settori di un

dato cerchio (n. 133). E considerando ora solamente i fusi, gli spicchi e gli archi equatoriali, si può dire che:

TEOREMA. *Nella stessa sfera o nelle sfere eguali*

1.° *ad archi equatoriali eguali corrispondono fusi e spicchi eguali.*

2.° *alla somma dei due archi equatoriali corrisponde il fuso o lo spicchio somma dei due fusi o dei due spicchi corrispondenti.*

Così (fig. 246) se gli archi $\widehat{LG}$, $\widehat{NM}$ sono eguali, anche i fusi e gli spicchi corrispondenti $LABG$, $NABM$ sono eguali: così pure all'arco $\widehat{NG} = \widehat{NM} + \widehat{MG}$ corrisponde tanto il fuso come lo spicchio

$$NABG = NABM + MABG.$$

In particolare i fusi e gli spicchi *opposti* (corrispondenti cioè a diedri opposti) sono eguali.

570. Si deduce (n. 284) che

TEOREMA. *Nella stessa sfera o nelle sfere eguali gli archi equatoriali, i fusi e gli spicchi sono proporzionali.*

MISURA DEL FUSO E DELLO SPICCHIO. Se in una sfera si assumono come unità di misura dei fusi e degli spicchi rispettivamente quel fuso e quello spicchio, il cui arco equatoriale è un quadrante (unità di misura degli archi), detti rispettivamente *fuso retto* e *spicchio retto*, e queste unità si suddividono come il quadrante, da questo teorema risulta che:

La misura di un fuso o di uno spicchio è eguale a quella dell'arco equatoriale.

Così ad es. dicendo un fuso od uno spicchio di 30° , s'intende un fuso od uno spicchio che sono $\frac{30}{90}$ del quarto rispettivamente della superficie sfe-

rica o della sfera; ossia un fuso od uno spicchio, il cui arco equatoriale corrispondente è $30.^{\circ}$.

571. Un piano segante divide la superficie sferica in due parti dette *calotte*, e la sfera in due parti dette *segmenti sferici ad una base*. La *base* di ciascuna calotta e di ciascun segmento è il cerchio sezione; l'*altezza* è quella parte di diametro sferico perpendicolare alla base, che è compresa fra la calotta e la base.

572. Due piani seganti e paralleli dividono la superficie sferica in tre parti, cioè due calotte ed una *zona*, che è la parte compresa fra i due piani; e dividono la sfera in tre parti, cioè in due segmenti ad una base ed un *segmento a due basi*, che è contenuto dalla zona e dai due piani seganti. Si dicono *basi* della zona e del segmento i due cerchi sezione: l'*altezza* è la distanza delle due basi.

573. Una zona si può supporre generata da un arco di meridiano, che ruota intorno all'asse che non lo interseca: se l'arco ha un estremo sull'asse, la superficie generata è una calotta. Così (fig. 246) l'arco $\widehat{CB}$, rotando intorno ad AB genera una calotta, l'arco $\widehat{CF}$ una zona.

574. Un segmento sferico ad una o a due basi si può supporre generato da un semi-segmento circolare ad una o a due basi rispettivamente, che ruota intorno alla sua saetta. Così (fig. 246) il semi-segmento circolare CHB, rotando intorno a BH, genera un segmento sferico ad una base, e il semi-segmento CHPF, rotando intorno ad HP, genera un segmento sferico a due basi.

575. Finalmente dicesi *settore sferico* quella parte di sfera, che è contenuta da una calotta e dalla

superficie conica, che ha per vertice il centro della sfera e per base la base della zona: oppure che è contenuta da una zona e dalle superficie coniche che hanno per vertice il centro della sfera e per basi le basi della zona: la zona o calotta, secondo i casi, dicesi la *base del settore*.

576. Un settore sferico si può supporre generato da un settore circolare che ruota intorno ad un diametro del suo cerchio che non lo attraversa. Così il settore circolare BOC (fig. 246) rotando intorno ad AB genera un settore sferico, che ha per base la calotta generata da $\widehat{BC}$; il settore circolare COF genera un settore sferico che ha per base la zona generata da $\widehat{CF}$.

§ 4.° Poligoni e piramidi sferiche.

577. Se si immagina un angoloide col vertice nel centro O della sfera (fig. 249), le sue facce tagliano la superficie sferica secondo archi di circonferenza massima. La parte di superficie sferica che risulta interna all'angoloide stesso dicesi *poligono sferico*. Gli archi che lo limitano diconsi i *lati* del poligono: gli angoli formati da questi archi, cioè gli angoli delle coppie di tangenti agli archi stessi nel punto comune, si dicono gli *angoli* del poligono. È facile vedere che questi angoli sono sezioni rette dei diedri dell'angoloide.

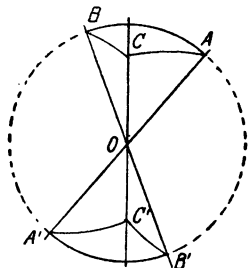


Fig. 249.

578. Tra gli elementi del poligono sferico (lati ed angoli) e quelli dell'angoloide (facce e diedri) vi è una perfetta corrispondenza di posizione relativa e di estensione. Riguardo a quest'ultima anzi si osserva che le facce ed i diedri dell'angoloide hanno rispettivamente la stessa misura dei lati

e degli angoli del poligono. Sarà facile perciò allo studioso distinguere i poligoni sferici in convessi, concavi, intrecciati secondo che lo sono i corrispondenti angoloidi (e i poligoni piani cogli stessi vertici), e fare osservazioni analoghe a quelle dei n. 461 e seg. relative agli angoloidi.

579. Così diremo *opposti* due triangoli (poligoni) come ABC , $A'B'C'$, 'corrispondenti a triedri (angoloidi) opposti. Essi hanno gli elementi ordinatamente eguali, ma in generale non sono eguali. Restringendoci ai triangoli opposti, essi sono però eguali quando sono isosceli (n. 467).

580. Si dicono *supplementari* due triangoli (poligoni) corrispondenti a due triedri (angoloidi) supplementari (n. 468). In questo caso i lati dell'uno sono i supplementi degli archi di circ. massima corrispondenti agli angoli dell'altro.

OSSERVAZIONE. Dalla costruzione di due triangoli supplementari risulta che un lato dell'uno ha per *polo* un vertice

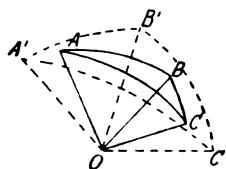


Fig. 250.

dell'altro; e precisamente il vertice di quell'angolo di cui l'arco corrispondente è il supplemento del lato. Ad es. il vertice A del triangolo ABC (fig. 250) è il polo del lato $B'C'$, e reciprocamente A' è il polo di BC . Perciò i due triangoli si dicono anche *polari* l'uno dell'altro.

581. Seguono alcuni teoremi sui triangoli (poligoni) sferici; le dimostrazioni (che si possono dare anche direttamente) si deducono senza difficoltà da quelle dei teoremi correlativi sugli angoloidi.

a) Sui lati

1.° In un triangolo (poligono) un lato è minore della somma degli altri (n. 472).

2.° In un triangolo se due angoli sono eguali, i lati opposti sono eguali (n. 474, 1.°).

COROLLARIO. Se i tre angoli sono eguali, i tre lati sono eguali.

3.° In un triangolo se due angoli sono diseguali, i lati opposti sono diseguali nello stesso senso (n. 474, 2.°).

Reciprocamente:

4.° In un triangolo secondochè due lati sono eguali o diseguali, gli angoli opposti sono eguali o diseguali nello stesso senso (n. 475, 1.° e 2.°).

COROLLARIO. *Se i tre lati sono eguali, gli angoli opposti sono eguali.*

5.° *In un triangolo (poligono) la somma dei lati è minore di una circonferenza massima (n. 476).*

b) Sugli angoli:

6.° *In un triangolo la somma degli angoli è compresa fra $\widehat{2R}$ e $\widehat{6R}$ (n. 478):*

7.° *In un poligono di n lati la somma degli angoli è compresa fra $(2n - 4)\widehat{R}$ e $2n\widehat{R}$ (n. 479).*

OSSERVAZIONE. Si chiama *eccesso sferico* di un poligono sferico la differenza tra la somma degli angoli del poligono sferico e quella degli angoli del poligono piano dello stesso numero di lati.

8.° *In un triangolo un angolo aumentato di $\widehat{2R}$ supera la somma degli altri due (n. 480).*

9.° *In un poligono di n lati un angolo aumentato di $2(n - 2)\widehat{R}$ supera la somma degli altri (n. 481).*

Sull'eguaglianza:

10.° *Se due triangoli hanno ordinatamente eguali un lato ed i due angoli adiacenti, oppure due lati e l'angolo compreso, hanno eguali gli altri elementi opposti ad elementi eguali, ed i due triangoli o sono eguali, o sono eguali-opposti (n. 482, 483).*

11.° *Se due triangoli hanno due lati rispettivamente eguali e gli angoli compresi diseguali, sono diseguali nello stesso senso anche i lati opposti ad angoli diseguali (numero 483, 2.°).*

12.° *Se due triangoli hanno i tre lati rispettivamente eguali, gli angoli opposti sono eguali e i due triangoli o sono eguali, o sono eguali-opposti (n. 484, 1.°).*

13.° *Se due triangoli hanno due lati rispettivamente eguali, ed i rimanenti diseguali, sono diseguali nello stesso senso anche gli angoli opposti a lati diseguali (484, 2.°).*

14.° *Se due triangoli hanno gli angoli rispettivamente eguali, i lati opposti sono eguali, ed i triangoli sono eguali od eguali-opposti (n. 485).*

15.° *Se due poligoni dello stesso numero di lati hanno i lati e gli angoli ordinatamente eguali ad eccezione:*

1.° *di un angolo e dei due lati adiacenti,*

2.° *di un lato e dei due angoli adiacenti,*

3.° di tre lati consecutivi,

4.° di tre angoli consecutivi.

sui quali non si fa alcuna ipotesi, anche questi elementi sono eguali, e i due poligoni o sono eguali, o sono eguali-opposti (n. 486, 2.°).

582. Un poligono sferico è *regolare* se equiangolo ed equilatero. Due poligoni regolari opposti sono eguali (n. 488).

583. TEOREMA. *Ad un triangolo sferico ABC (fig. 249) si può circoscrivere una circonferenza ed una sola.*

Infatti s'immagini il luogo dei punti equidistanti dai tre punti A, B, C (n. 446, Cor.), che è una retta che passa pel centro della sfera, ed è perpendicolare al piano dei tre punti (e lo incontra nel centro della circonferenza circoscritta al triangolo piano ABC); questa incontra la superficie sferica nel polo o *centro sferico* della circonferenza ABC (e nel suo opposto).

584. TEOREMA. *In un triangolo sferico si può iscrivere una circonferenza ed una sola.*

Sia ABC il triangolo sferico (fig. 251) ed OABC il triedro

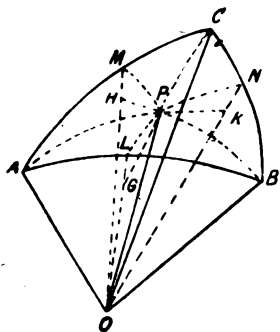


Fig. 251.

corrispondente. I piani bisettori dei diedri $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ s'incontrano secondo una retta OP, i punti della quale sono equidistanti dalle tre facce del triedro (n. 447), e per questa deve passare anche il piano bisettore del diedro $\overline{OC}$. Questi tre piani intersecano il triangolo secondo tre archi (bisettori degli angoli) che passano per uno stesso punto P. Si conducano da P le distanze PG, PH, PK dalle tre facce $\widehat{AOB}$, $\widehat{AOC}$,

$\widehat{BOC}$; le quali sono eguali. I triangoli rettangoli POG, POH, POK sono eguali per avere l'ipotenusa comune ed i cateti PG, PH, PK eguali. Perciò gli angoli $\widehat{POG}$, $\widehat{POH}$, $\widehat{POK}$ sono eguali, e gli archi $\widehat{PL}$, $\widehat{PM}$, $\widehat{PN}$ secondo i quali detti angoli incontrano il triangolo sferico sono pure eguali e perpendicolari ai lati $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$, $\widehat{BC}$ del triangolo. Di più sono i minimi che si possono condurre da P rispettivamente ai detti lati. Infatti, considerato ad es. il lato $\widehat{AB}$, si ha che di tutti gli

angoli che la OP fa colle rette condotte da O nel piano AOB il minimo è appunto $\widehat{POL}$ (n. 449); perciò di tutti gli archi di circonferenza massima che da P vanno all' arco $\widehat{AB}$, PL è il minimo. Lo stesso dicasi per gli altri due. Perciò la circonferenza che ha per centro (polo) il punto P e raggio sferico PL è iscritta nel triangolo ABC (cioè è tangente ai lati nei punti L, M, N).

OSSERVAZIONE. Se si conduce l' arco $\widehat{ML}$ di circonferenza massima, si ha il triangolo LPM che è isoscele, perciò $\widehat{PML} = \widehat{PLM}$. Si deduce allora che $\widehat{AML} = \widehat{ALM}$, perchè complementari dei primi; d' onde anche il triangolo AML è isoscele ossia $\widehat{AM} = \widehat{AL}$. Similmente si prova che $\widehat{BL} = \widehat{BN}$ e $\widehat{CN} = \widehat{CM}$.

585. Si dice *piramide sferica* la parte di sfera limitata da un angoloide col vertice nel centro e dal poligono sferico corrispondente; questo si dice la *base* della piramide.

Se le basi sono poligoni opposti, le piramidi si dicono *opposte*, e sono figure eguali-opposte.

Due piramidi opposte sono eguali, se le basi sono eguali per es. due piramidi a basi regolari; due piramidi triangolari aventi per basi triangoli isosceli opposti.

§ 5.º Poliedri iscritti e circoscritti.

586. Una superficie poliedrica (aperta o chiusa) dicesi *iscritta* in una sfera, se i suoi vertici sono sulla superficie della sfera: questa dicesi *circoscritta*.

Una superficie poliedrica dicesi *circoscritta* ad una sfera, se le sue facce sono tangenti alla superficie della sfera: questa dicesi *iscritta*.

587. TEOREMA. *Ad un tetraedro si può circoscrivere una sfera ed una sola.*

Sia ABCD (fig. 252) un tetraedro: dai centri M, N dei cerchi circoscritti a due facce BCD, ACD si elevino le perpendicolari alle facce stesse, le quali, essendo in uno stesso piano (che è il piano MPN

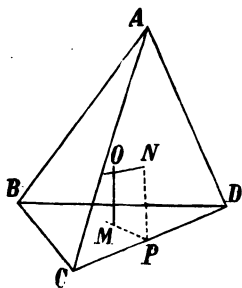


Fig. 252.

perpendicolare allo spigolo CD nel punto medio P), si incontreranno in un punto O. Per essere il punto O sulla OM, si ha (n. 446, Cor.)

$$OB = OC = OD$$

e per essere sulla ON è

$$OC = OD = OA.$$

Dunque il punto O è equidistante dai vertici, e la superficie sferica di centro O e raggio OA passa pei

punti B, C, D; ed è evidente che è unica.

OSSERVAZIONE. Questo teorema si enuncia anche così:

Per quattro punti non nello stesso piano passa una superficie sferica ed una sola.

COROLLARIO 1.^o *I piani perpendicolari agli spigoli di un tetraedro nei loro punti medi passano per un punto.*

COROLLARIO 2.^o *Le perpendicolari alle facce d'un tetraedro nei centri dei circoli circoscritti concorrono in un punto.*

588. TEOREMA. *In un tetraedro si può inscrivere una sfera ed una sola.*

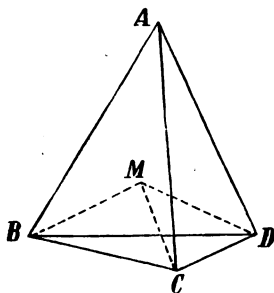


Fig. 253.

Sia ABCD (fig. 253) un tetraedro. Immaginando i piani bisettori di tre diedri, per es. dei diedri $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DB}$, questi avranno in comune un punto M, il quale sarà equidistante dalle facce ABC, BCD per appartenere al primo piano bisettore (n. 447); dalle facce ACD

BCD per appartenere al secondo; e dalle facce ABD, BCD per appartenere al terzo. Dunque il punto M è equidistante dalle quattro facce e la superficie sferica, che ha per centro M e per raggio la distanza del punto M da una delle facce, è tangente alle quattro facce; ed è manifesto che è unica.

COROLLARIO. *I piani bisettori dei diedri d'un tetraedro concorrono in un punto.*

589. TEOREMA. *Ad ogni superficie poliedrica regolare si può circoscrivere ed inscrivere una sfera.*

Sia data una superficie poliedrica regolare (fig. 254): dai centri M, N dei cerchi iscritti in due facce consecutive si elevino alle facce stesse le perpendicolari, le quali trovandosi in uno stesso piano (che è il piano MPN perpendicolare allo spigolo comune CD nel punto medio P) s'incontreranno in un punto O, che dico essere il centro tanto della sfera circoscritta che della iscritta. Infatti per essere il punto O sulla OM, si ha

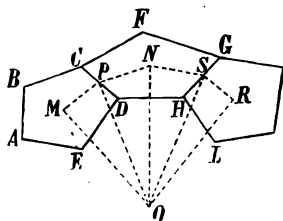


Fig. 254.

$OA = OB = OC = OD = OE$ (n. 443, 2.^o).
e per essere sulla ON, si ha

$$OC = OD = OF = OG = OH.$$

ossia il punto O è equidistante dai vertici delle due facce considerate. Di più i due triangoli rettangoli OPM, OPN per avere OP comune, $PM = PN$, sono eguali, perciò $OM = ON$, ossia il punto O equidista dalle due facce; di più $\widehat{OPM} = \widehat{OPN}$, ossia OP è bisettrice della sezione retta $\widehat{MPN}$ del diedro $\widehat{CD}$. Dal centro R del cerchio iscritto nella faccia GHL...

si cali la RS perpendicolare allo spigolo GH e si unisca O con R e con S: i triangoli rettangoli ONS, ONP sono eguali, perciò $OS = OP$ ed $\widehat{OPN} = \widehat{OSN}$; e poichè $\widehat{OPN} = \frac{1}{2} \widehat{MPN}$ e $\widehat{MPN} = \widehat{NSR}$ (perchè

sezioni rette di diedri eguali), sarà $\widehat{OSN} = \frac{1}{2} \widehat{NSR}$;

allora i due triangoli ONS, OSR, per avere OS comune, $NS = RS$ e gli angoli compresi eguali, sono eguali, da cui $ON = OR$ ed $\widehat{ORS} = \widehat{R}$; di più la OR è ortogonale a GH per essere nel piano NSR, dunque OR è perpendicolare alla faccia GHL: dopo ciò è chiaro che il punto O è equidistante dalle tre facce considerate e dai loro vertici: analogamente si ragionerebbe per le altre. Dunque la sfera di centro O e raggio OA è circoscritta e quella di raggio OM è iscritta nella superficie poliedrica.

OSSERVAZIONE. Il segmento OA dicesi *raggio* del poliedro ed OM l'*apotema*.

COROLLARIO 1.^o *I piani bisettori dei diedri, i piani perpendicolari agli spigoli nei loro punti medi, le perpendicolari alle facce nei centri dei cerchi iscritti concorrono in uno stesso punto O.*

COROLLARIO 2.^o *Esiste una sfera concentrica alle prime due (di raggio OP), che passa per i punti medi degli spigoli e taglia le facce della superficie poliedrica secondo le circonferenze iscritte nelle facce stesse.*

OSSERVAZIONE. Se si chiama *rete* d'una superficie poliedrica l'insieme dei suoi spigoli, l'ultimo corollario si può enunciare nel modo seguente:

In ogni rete poliedrica regolare si può iscrivere una sfera.

§ 6.° — Simmetria rispetto ad un punto.

590. La definizione di figure simmetriche rispetto ad un punto data al n. 177 e seg. (Planimetria) vale anche nello spazio.

Ad es. Due facce opposte d'un pllpdo sono simmetriche rispetto al punto d'incontro delle diagonali. Due angoloidi opposti al vertice sono simmetrici rispetto al vertice comune. Due poligoni sferici opposti sono simmetrici rispetto al centro della loro sfera.

Data una figura ed un punto qualunque, è sempre possibile costruire la figura simmetrica della prima rispetto a quel punto (vedasi n. 177). Se la figura data è piana, la sua simmetrica giace in un piano parallelo a quello della prima.

591. Una figura può esser simmetrica di sè stessa rispetto ad un punto, ed allora quel punto è *centro* della figura. Un segmento passante per il centro e terminato al contorno della figura è dimezzato nel centro, e chiamasi *diametro*. Ogni piano passante pel centro dicesi *piano diametrale*.

Ad es. Una sfera è simmetrica di sè stessa rispetto al centro: un parallelepipedo rispetto al punto d'incontro delle diagonali.

592 1.° TEOREMA. *Due figure solide simmetriche rispetto ad un punto sono eguali-opposte. Le piane sono eguali e i loro piani sono paralleli.*

Infatti i segmenti corrispondenti sono eguali e paralleli ma in direzione opposta; perciò le spezzate (i poligoni) che hanno per lati questi segmenti sono eguali e posti in piani paralleli; ma gli angoloidi sono eguali-opposti. Dunque le figure solide sono eguali-opposte.

Reciprocamente:

2.° TEOREMA. *Se due figure solide eguali-opposte o due figure piane eguali hanno i segmenti corrispondenti in direzioni opposte, le due figure sono simmetriche rispetto ad un punto (vedasi n. 180, 2.°).*

§ 7.° Simmetria rispetto ad una retta.

593. La definizione di figure simmetriche rispetto ad una retta data al n. 182 e seg. (Planimetria) vale anche nello spazio.

Lo stesso dicasi pel n. 184.

594. Una figura può esser simmetrica di sè stessa rispetto ad una retta, che dicesi *asse di simmetria* della figura. Una figura può avere anche più assi di simmetria.

Ad es. Un pllpdo rettangolo ha per assi di simmetria le rette che passano pei centri di due facce opposte. Un ottaedro regolare le sue diagonali. Un cono, un cilindro rotondo l'asse di figura. Una sfera una retta qualunque che passa pel centro.

595. TEOREMA. *Due figure simmetriche rispetto ad una retta sono eguali.*

Si dimostra come il n. 186.

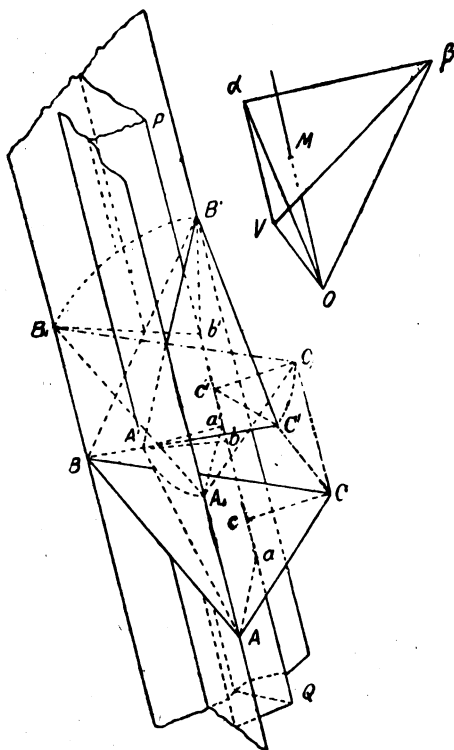


Fig. 255.

596. TEOREMA.

Date due figure eguali esiste una retta (ed una sola) tale che facendo scorrere una delle figure parallelamente alla retta e poi facendola rotare intorno alla retta, si può ridurla a coincidere coll'altra, oppure a renderla simmetrica dell'altra rispetto alla retta stessa.

Sieno le due figure eguali $ABC, \dots, A'B'C', \dots$ (fig. 255). Si uniscano tre coppie di punti corrispondenti $A, A'; B, B'; C, C'$. Da un punto qualunque O si conducano tre segmenti eguali e nella stessa dire-

zione rispettivamente di AA' , BB' , CC' e sieno $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$: s'immagini il piano $\alpha\beta\gamma$ e da O la OM perpendicolare a detto piano. Si conducano per i punti A , A' , B , B' le parallele alla OM ; indi le bisettrici delle striscie contenute dalle parallele condotte da A , A' e da B , B' ; per queste bisettrici i piani perpendicolari alle striscie stesse, che si incontreranno secondo una retta PQ parallela alla OM .

La PQ è la retta cercata.

Infatti è chiaro intanto che la retta PQ è il luogo dei punti che sono ad un tempo equidistanti dalle parallele condotte da A e da A' , non che da quelle condotte da B e da B' ; di più per essere PQ parallela ad OM ed i segmenti AA' , BB' , CC' paralleli ed eguali ad $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$, le proiezioni $a\alpha'$, $b\beta'$, $c\gamma'$ rispettivamente di AA' , BB' , CC' sopra PQ sono eguali al segmento OM , e perciò eguali tra loro.

Ciò posto, se si fa scorrere la figura ABC parallelamente alla PQ , in modo cioè che i punti A , B , C percorrano i tratti AA_1 , BB_1 , CC_1 , eguali e nella stessa direzione di OM , i punti a , b , c , verranno a coincidere rispettivamente con α' , β' , γ' , ed i segmenti Aa , Bb , Cc , prenderanno le posizioni $A_1\alpha'$, $B_1\beta'$, $C_1\gamma'$; così che ciascuna delle coppie di segmenti eguali $A\alpha'$, $A_1\alpha'$; $B\beta'$, $B_1\beta'$; $C\gamma'$, $C_1\gamma'$ si trova in un piano perpendicolare a PQ e comprende ciascuno degli angoli eguali $A_1\alpha'A$, $B_1\beta'B$, $C_1\gamma'C$. Facendo ora rotare la figura $A_1B_1C_1$... intorno alla PQ dell'angolo $A_1\alpha'A$, essa verrà a coincidere colla figura $A'B'C'$ Facendola incede rotare in senso opposto dell'angolo supplementare di $A_1\alpha'A$ si disporrà simmetrica della $A'B'C'$... rispetto alla PQ .

OSSERVAZIONE. Può avvenire che tutti i segmenti AA' , BB' , CC' ... sieno paralleli, nel qual caso il piano $\alpha\beta\gamma$ è indeterminato. Osserviamo allora che i quadrilateri che hanno per vertici due coppie di punti corrispondenti, come $AA'B'B$, avendo due lati paralleli (AA' , BB') e due eguali (AB , $A'B'$) non possono essere che o parallelogrammi o trapezi isosceli. Ma nei trapezi isosceli le rette che passano per i punti medi delle basi sono perpendicolari alle basi stesse; e poichè quelle rette a due a due s'incontrano, si troverebbero di necessità in un unico piano perpendicolare alle AA' , BB' ,.... Di conseguenza le figure ABC ,... $A'B'C'$... sarebbero simmetriche rispetto a questo piano e perciò eguali-opposte (vedasi

§ seg. n. 601). Ma ciò non è perchè le figure sono eguali per ipotesi: si conclude allora che i detti quadrilateri sono parallelogrammi, e perciò i segmenti AA' , BB' sono anche eguali. Allora la retta PQ del caso generale non esiste: e la figura ABC.... può ridursi a coincidere coll'altra colla semplice traslazione, in modo cioè che i suoi punti percorrano tratti eguali e nella stessa direzione di AA' .

§ 8.° Simmetria rispetto ad un piano.

597. Due punti sono *simmetrici rispetto ad un piano*, quando il segmento che li unisce è perpendicolare al piano ed è dimezzato dal piano stesso. Questo dicesi *piano di simmetria*.

598. Due figure sono *simmetriche* rispetto ad un piano, quando i punti dell'una sono simmetrici di quelli dell'altra rispetto allo stesso piano.

Ad es. Le facce di un diedro o di uno strato sono simmetriche rispetto al piano bisettore.

599. Data una figura ABCD.... (fig. 256) ed un piano, è

sempre possibile costruire la figura simmetrica della data rispetto al piano. Basta infatti condurre dai punti A, B, C, D... i segmenti Aa , Bb , Cc , Dd perpendicolari al piano e prolungarli in A' , B' , C' , D' in modo che

$$Aa = A'a, \quad Bb = B'b, \\ Cc = C'c, \quad Dd = D'd, \dots$$

La figura $A'B'C'D'$ è simmetrica della prima rispetto al piano dato.

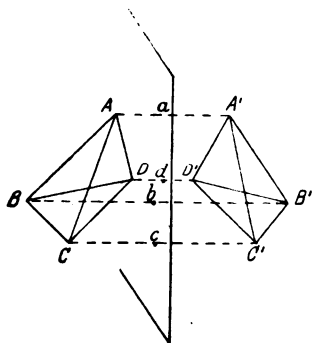


Fig. 256.

Si deduce che ogni punto del piano di simmetria (considerato come facente parte della figura ABCD...) ha per corrispondente nell'altra il punto stesso, perchè simmetrico di se stesso.

600. Una figura può essere simmetrica di sè stessa rispetto ad un piano; questo dicesi *piano di simmetria o piano*

principale della figura. Una figura può avere più piani di simmetria.

Ad es. Due piani che si segano hanno per piani di simmetria i bisettori dei loro diedri. Un parallelepipedo rettangolo i piani che dimezzano quattro spigoli paralleli. Un prisma o una piramide retta a base regolare, i piani passanti per gli assi di simmetria delle basi e perpendicolari alle medesime. Un cono, un cilindro rotondo qualunque piano passante per l'asse. Una sfera, qualunque piano diametrale.

601. TEOREMA. *Due figure solide simmetriche rispetto ad un piano sono eguali-opposte. Le piane sono eguali, ed i loro piani o sono paralleli, o sono egualmente inclinati sul piano di simmetria e s'incontrano sul piano stesso.*

Infatti (fig. 256) si prendano tre punti a, b, c del piano di simmetria e si uniscano colle coppie di punti corrispondenti $A, A'; B, B'; C, C'; D, D';$ ecc...; il che equivale a prendere tre punti della prima figura ed i tre corrispondenti della seconda (che sono ancora i punti stessi) ed unirli colle coppie di punti corrispondenti delle due figure, come nel teorema 518. Ciò posto, è facile constatare che le coppie di tetraedri $abcA, abcA'; abcB, abcB';$ ecc..... così ottenute sono eguali-opposte, perchè hanno le facce rispettivamente eguali ma rispetto alla faccia abc comune sono situate da bande opposte. Dunque le due figure $ABCD., A'B'C'D'...$, pel teorema 518 sono eguali-opposte. I segmenti omologhi poi, come $AB, A'B'$, prolungati s'incontrano sulla ab , o sono paralleli: perciò i piani delle figure piane simmetriche s'incontrano sul piano di simmetria o sono paralleli. Il piano di simmetria poi è il bisettore dei loro diedri e dei loro strati.

CAPITOLO IV.

POLIEDRI EQUIVALENTI

§ 1.^o Definizioni.

602. Al cap. II si sono studiati i poliedri, considerandoli come figure. Passiamo ora a studiare la loro estensione, cioè a considerarli come grandezze. E perciò vediamo di stabilire per essi i concetti di *equivalenza* (eguaglianza di estensione), di somma, di differenza (diseguaglianza).

603. L'intuizione ci avverte (e una somigliante osservazione abbiamo fatta anche per le linee e le superficie finite), che due poliedri (ed in generale due solidi finiti) possono avere eguale estensione senza essere eguali. Questo concetto intuitivo, che ha dell'indeterminato, per le linee e per le superficie finite è stato tradotto in forma razionale dando luogo a tre casi; o per meglio dire classificando quelle grandezze, quando sono equivalenti, in tre specie: e cioè grandezze eguali o di prima specie; grandezze decomponibili nello stesso numero di parti rispettivamente eguali o di seconda specie; grandezze limiti di serie composte di grandezze equivalenti di prima o di seconda specie. I poliedri, come vedremo, danno pure luogo a questi tre casi. Per ora però riterremo equivalenti due poliedri

eguali o decomponibili nello stesso numero di parti rispettivamente eguali.

604. Due poliedri sono *adiacenti*, se esterni uno all'altro con una parte di superficie comune.

605. *Addizionare* due poliedri vuol dire disporli adiacenti e sopprimere la parte di superficie comune: il poliedro risultante dicesi la loro *somma*.

La definizione si estende facilmente al caso di più poliedri.

Circa questa operazione valgono le stesse osservazioni fatte per le somme dei poligoni (planim., cap. IV).

606. Dati due poliedri *A* e *B*, se è possibile disporli l'uno interno all'altro con una parte di superficie comune, si dice che si fa la *sottrazione*. Il poliedro interno, sia *B*, è il *minore*; *A* è il *maggiore*, ed il poliedro che risulta sopprimendo la parte di superficie comune è la *differenza*.

L'operazione ha un po' dell'arbitrario, e nell'eseguirla si possono sostituire ai poliedri le loro parti; ma non è sempre possibile.

607. E qui occorre fare una distinzione. Vi sono poliedri pei quali l'equivalenza trae con sè anche l'eguaglianza di forma; in altre parole si comportano come grandezze di prima specie. Tali ad es. i poliedri regolari della stessa specie, i prismi retti di egual base (confrontati s'intende quelli della stessa specie). Per questi la sottrazione è sempre possibile colla sovrapposizione.

Ma ciò non avviene se si confronta uno di essi per es. un cubo, con un poliedro di specie diversa o due poliedri qualunque. Epperò converrà trasformarli, cioè sostituire ai medesimi altri poliedri

formati dallo stesso numero di parti eguali a quelle dei primi, e che sieno paragonabili per sovrapposizione; poichè quando si tratti della estensione, ad un poliedro se ne può sostituire un altro equivalente.

608. TEOREMA. *Dati tre poliedri A, B, C, se A e C sono decomponibili nello stesso numero di parti rispettivamente eguali, e B e C pure in parti eguali (diverse dalle prime), anche i poliedri A e B sono decomponibili nello stesso numero di parti rispettivamente eguali.*

Si dimostra come il teor. 195 sostituendo alle linee le superficie di divisione. Il teorema si può estendere a più poliedri.

§ 2. Equivalenza di prismi e parallelepipedi.

609. TEOREMA. *Due prismi triangolari che hanno le sezioni rette e gli spigoli laterali eguali, sono equivalenti.*

Due prismi triangolari colle sezioni rette eguali si possono sovrapporre in modo che i loro spigoli laterali cadano sopra le medesime tre rette parallele col far coincidere le sezioni rette; di più per essere eguali i detti spigoli, si può far sì che uno del primo prisma coincida con uno dell'altro (facendo scorrere opportunamente uno dei prismi). Dopo ciò può darsi:

1.º che le tre coppie di spigoli coincidano, ed allora i prismi stessi coincidono e sono equivalenti;

2.º che coincidano solo due coppie di spigoli, come avviene dei due prismi ABCDEF, ABMDEN

(fig. 257) che hanno comuni i due spigoli laterali AD, BE. In questo caso gli altri due spigoli MN, CF possono avere una parte CN comune (come nella figura)

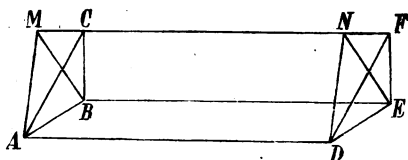


Fig. 257.

o essere adiacenti, ed allora i due prismi sono equivalenti, perchè composti di una parte comune, cioè il poliedro ABCDEN, e di due parti eguali, che sono i tetraedri ABCM, DEFN eguali per avere

$$ABC = DEF, \quad ABM = DEN \quad \text{e} \quad \overline{MABC} = \overline{NDEF}$$

e similmente posti (n. 503); o finalmente MN è tutto esterno a CF, ed allora portando di seguito ad FC dei segmenti eguali ad FC ed immaginando i prismi corrispondenti, si ha una serie di prismi equivalenti a due a due, analogamente a quanto si disse al n. 198, 3.º per i parallelogrammi; dunque i due prismi dati sono equivalenti (n. 604):

3.º che una sola coppia di spigoli coincida, il che si potrà fare in modo che le basi non si taglino, come per i due prismi ABCDEF, ANMDQP

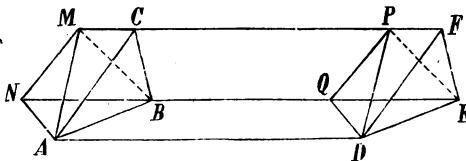


Fig. 258.

(fig. 258), che hanno in comune il solo spigolo AD. Congiungendo allora M con B e P con E si forma un terzo prisma ABMDEP equivalente a ciascuno dei primi due, per avere la medesima sezione retta, di più gli spigoli AD, BE comuni col

ma un terzo prisma ABMDEP equivalente a ciascuno dei primi due, per avere la medesima sezione retta, di più gli spigoli AD, BE comuni col

primo, e gli spigoli AD, MP comuni col secondo : dunque i primi due (n. 608) sono equivalenti.

COROLLARIO. *Un parallelepipedo è diviso da un piano diagonale in due prismi triangolari equivalenti.*

Infatti questi prismi hanno gli spigoli laterali eguali (due in comune); di più la sezione retta del parallelepipedo (che è un parallelogrammo.) viene decomposta dal piano diagonale in due triangoli eguali, che sono le sezioni rette dei due prismi.

I medesimi sono anche eguali-opposti.

610. TEOREMA. *Due prismi che hanno gli spigoli laterali eguali e le sezioni rette equivalenti, sono equivalenti.*

Si decompongano le sezioni rette dei due prismi nello stesso numero di triangoli eguali, il che è possibile (n. 206), e per le rette di divisione s'immaginino i piani paralleli agli spigoli laterali; dopo ciò i due prismi risultano decomposti nello stesso numero di prismi triangolari aventi a due a due gli spigoli laterali e le sezioni rette eguali; perciò i due prismi (come somme di prismi equivalenti) sono equivalenti.

COROLLARIO. *Un parallelepipedo retto equivale ad un parallelepipedo rettangolo di base equivalente e della medesima altezza.*

611. TEOREMA. *Due parallelepipedi di basi eguali ed altezze corrispondenti eguali sono equivalenti.*

I due parallelepipedi ABCDE, A'B'C'D'E' (fig. 259) abbiano le basi ABCD, A'B'C'D' eguali e le altezze corrispondenti pure eguali. Si taglino i due parallelepipedi con piani perpendicolari agli spigoli AB, A'B': si otterranno due parallelogrammi LMNF,

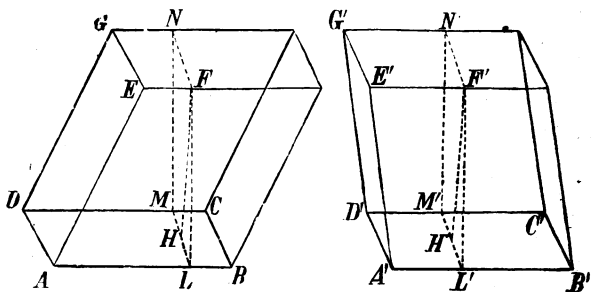


Fig. 259.

$L'M'N'F'$ che sono equivalenti, perchè le loro basi LM , $L'M'$ sono eguali (come altezze dei parallelogrammi $ABCD$, $A'B'C'D'$) e le altezze corrispondenti FH , $F'H'$ sono eguali, per essere anche le altezze dei due parallelepipedi (n. 428). Allora se si assumono come basi dei due parallelepipedi le facce $ADGE$, $A'D'G'E'$, si può dire che essi hanno le sezioni rette ($LMNF$, $L'M'N'F'$) equivalenti e gli spigoli laterali (AB , $A'B'$) eguali; dunque i due parallelepipedi sono equivalenti (n. 610).

COROLLARIO 1.º *Un parallelepipedo obliquo equivale ad un parallelepipedo retto della stessa base e della stessa altezza; e tenuto conto del corollario al n. 610,*

2.º *Un parallelepipedo obliquo equivale ad un parallelepipedo rettangolo di base equivalente e della medesima altezza.*

612. TEOREMA. *Un prisma triangolare equivale ad un parallelepipedo di base equivalente e della medesima altezza.*

Sia il prisma $ABCDEF$ (fig. 260): si trasformi il triangolo ABC nel parallelogrammo $ACHG$, dove AG è la metà di AB , e sul parallelogrammo si co-

struisca il parallelepipedo ACHGD, avente comuni col prisma i due spigoli laterali AD, CF. Il parallelepipedo ed il prisma sono equivalenti.

Infatti per un punto N dello spigolo AD si conduca il piano perpendicolare ad AD, il quale interseca il parallelepipedo secondo la sezione setta NPQR (n. 506) la quale è un parallelogrammo (n. 512), ed il prisma dato secondo la sezione retta NRS. Il punto P è il punto medio del segmento NS (n. 132. Oss.), perciò il pllgrmo NPQR ed il triangolo NSR sono equivalenti (n. 199).

Ciò posto il pllpdo ed il prisma, avendo le sezioni rette equivalenti e gli spigoli laterali eguali, sono equivalenti.

COROLLARIO. *Due prismi triangolari di basi eguali ed altezze eguali sono equivalenti.*

Infatti si trasformino i due prismi in pllpdì; questi avranno eguali le basi e le corrispondenti altezze, perciò saranno equivalenti (n. 611); dunque anche i due prismi (n. 608) sono equivalenti.

613. TEOREMA. *Due prismi di basi equivalenti e di altezze eguali sono equivalenti.*

La stessa dimostrazione del teorema 610, sostituendo alle sezioni rette le basi ed agli spigoli laterali le altezze, e tenendo presente il corollario del n. 612.

COROLLARIO. *Un prisma equivale al parallelepi-*

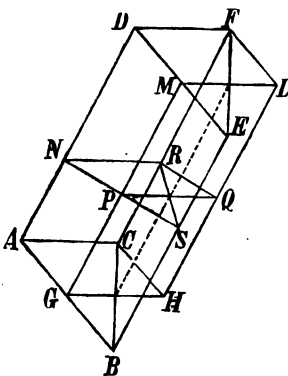


Fig. 256.

pedo rettangolo di base equivalente e della medesima altezza; oppure al parallelepipedo rettangolo di base equivalente alla sezione retta e di altezza eguale allo spigolo laterale (n. 610).

614. TEOREMA. *Sopra un rettangolo dato come base, si può costruire un parallelepipedo rettangolo equivalente ad un parallelepipedo rettangolo dato; o, come si dice per brevità, si può trasformare un parallelepipedo rettangolo in un altro di base data.*

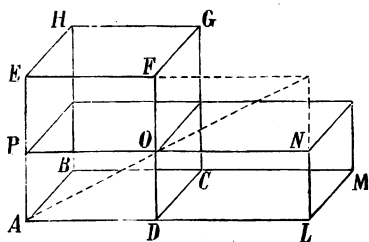


Fig. 261.

Sia $ABCD$ (fig. 261) il parallelepipedo dato: sovrapposta la base data alla base $ABCD$ coll'angolo $\widehat{A}$ in comune, si supponga in primo luogo che i due rettangoli abbiano il lato AB comune e sia $ALMB$ la nuova base. Si trasformi il rettangolo $ADFE$ in un altro di base AL e sia $ALNP$ (n. 208); il parallelepipedo di base $ALMB$ e di altezza LN è equivalente al dato. Infatti i due parallelepipedi si possono considerare come aventi per base i rettangoli $ADFE$, $ALNP$ equivalenti, e per altezza comune AB : perciò sono equivalenti (n. 613).

Se poi la base è qualunque come $AQRS$ (fig.

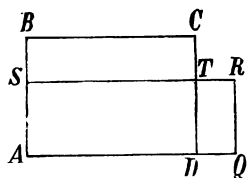


Fig. 262.

262) (e $ABCD$ è la base del pllpdo dato), si può trasformare il parallelepipedo dato prima in un altro di base $ADTS$ e questo in un terzo di base $AQRS$, come nel primo caso.

615. TEOREMA. *Dati due prismi è possibile decomporli in parti in modo da verificarsi o l'uno o l'altro dei casi seguenti:*

o le parti dell'uno sono eguali ciascuna a ciascuna a quelle dell'altro;

oppure uno è formato di parti eguali ciascuna a ciascuna a quelle dell'altro, più altre parti.

Si dimostra come il teor. 206 sui poligoni, trasformando i due prismi in pllpdi rettangoli di egual base.

OSSERVAZIONE. Il teorema vale anche per due poliedri che sieno decomponibili in prismi ordinatamente equivalenti.

Dopo ciò è manifesto che i prismi (e i poliedri decomponibili in prismi) sono grandezze della seconda specie; perciò ad essi sono applicabili le proposizioni di cui al n. 71.

616. Un pllpdo rettangolo, di cui i tre spigoli che partono da uno stesso vertice sono i segmenti a, b, c , si dice il pllpdo a, b, c , e si scrive $a.b.c$ ⁽¹⁾. Questi spigoli si dicono anche le sue *dimensioni*.

Un cubo, il cui spigolo sia eguale ad a , si dice il cubo di a , e si scrive a^3 ⁽¹⁾.

Un pllpdo di base equivalente a B e di altezza h si dice il pllpdo B, h , e si scrive $B.h$ ⁽¹⁾.

617. TEOREMA. *La somma o la differenza di due pllpdi rettangoli di basi eguali equivale al pllpdo della stessa base e che ha per altezza la somma o la differenza delle altezze; cioè, dette B la base ed a, a' le altezze, si ha*

$$B.a + B.a' = B.(a + a')$$

⁽¹⁾ S' intende che ai simboli $a.b.c, a^3, B.h$ non va attribuito alcun significato aritmetico.

In particolare (se $a = a'$)

$$2B.a = B.2a$$

ed anche (se $a > a'$):

$$B.a - B.a' = B. (a - a') \quad (1)$$

OSSERVAZIONE. Se $a = a'$ il segmento $a - a'$ è nullo. Si dice allora che il pllpdo di base B e di altezza nulla è *nullo*. Anche per i pllpd di nulli vale quanto è stato detto circa le grandezze nulle (n. 70).

618. TEOREMA. *La somma, o la differenza, di due parallelepipedi d' eguale altezza equivale al parallelepipedo della stessa altezza e che ha la base equivalente alla somma, o alla differenza, delle basi.*

Infatti trasformate le basi dei due pllpd in rettangoli di egual base (n. 208), e costruita la loro somma, o la loro differenza, è chiaro che il pllpdo costruito su questa come base e della stessa altezza dei primi equivale alla somma, o alla differenza, dei medesimi.

619. 1.° TEOREMA. *Una serie di pllpd rettangoli cresce (decresce) illimitatamente, se le loro basi crescono (decrescono) illimitatamente e le loro altezze sono eguali; oppure anche se le loro basi e le loro altezze crescono (decrescono) illimitatamente.*

2.° TEOREMA. *Una serie di pllpd rettangoli di altezza a , di cui le basi crescono (decrescono) limitatamente ed hanno per limite il rettangolo B , cresce (decresce) limitatamente, ed ha per limite il pllpdo $B.a$.*

3.° TEOREMA. *Due serie di pllpd rettangoli, di cui le altezze sono due serie convergenti al limite a , e le basi sono due serie convergenti al limite B , sono convergenti al pllpdo $B.a$.*

(1) È chiaro che di due pllpd rettangoli di egual base è sempre possibile trovare la somma o la differenza.

OSSERVAZIONE. Il teorema regge, se ad una o ad entrambe le serie convergenti ad a si sostituisce una serie di segmenti eguali ad a , oppure anche se ad una o ad entrambe le serie convergenti a B , si sostituisce una serie di rettangoli eguali a B .

I teoremi 619, 1.° 2.° 3.° si dimostrano come gli analoghi al n. 268, 1.° 2.° 3.°.

§ 3.° Equivalenza di piramidi e tronchi di piramide e di prisma.

620. Trattando dei prismi equivalenti si è veduto che essi sono scomponibili nello stesso numero di parti rispettivamente eguali. Ciò non si può ottenere per le piramidi equivalenti ⁽¹⁾, di guisa che per lo studio di questi poliedri conviene ricorrere al concetto di limite. In altre parole le piramidi sono grandezze della terza specie (vedasi n. 269 e seg.).

Sia un tetraedro ABCD (fig. 263): si divida lo spigolo AB in un certo numero di parti eguali, per es. in tre. Per i punti di divisione E, F e pel ver-

⁽¹⁾ In seguito agli infruttuosi tentativi fatti per decomporre due tetraedri (anche speciali) d' egual base e d' eguale altezza nello stesso numero di parti eguali, sorse il dubbio che tale decomposizione fosse impossibile; e si cercò di dimostrarlo. A ciò è pervenuto il sig. MAX DEHN per mezzo di considerazioni che non possono essere qui esposte e che lo studioso può trovare in un pregevolissimo articolo del prof. U. Amaldi nel *Bollettino di Matematica* di Bologna (direttore prof. A. Conti) n. 1-2, anno 1905. Sulla medesima questione deve essere ricordato anche il caso speciale già prima studiato dal prof. G. Sforza (Vedi *Periodico di Matematica* (direttore prof. G. Lazzeri) fasc. IV Luglo-Agosto 1897).

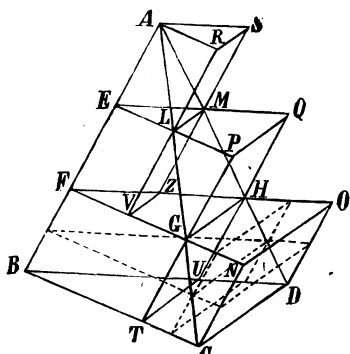


Fig. 263.

tice A si conducano i piani paralleli alla base BCD, i quali (eccetto l'ultimo) taglieranno il tetraedro secondo i triangoli FGH, ELM. Per i lati CD, GH, LM si conducano i piani paralleli ad AB ad incontrare tanto la sezione inferiore che la superiore al lato considerato. Tut-

ti questi piani con quelli delle facce ABC, ABD del tetraedro determinano due serie di prismi, la prima dei prismi BCDFNO, FGHEPQ, ELMARS che diremo *esterni* al tetraedro, la seconda dei prismi BTUFGH, FVZELM, che diremo *interni* al tetraedro: ad ogni prisma esterno corrisponde l'interno compreso fra gli stessi piani paralleli, salvo l'ultimo esterno che non ha il corrispondente interno.

Ciò posto, se si raddoppia il numero delle parti in cui è diviso lo spigolo AB, la somma dei prismi esterni decresce e quella degli interni cresce. Ed infatti, se si fa una nuova sezione ad egual distanza dalle due BCD, FGH e pel lato corrispondente si conduce il piano parallelo ad AB, dalla figura si scorge che al primo prisma esterno se ne sostituiscono due, di cui l'uno (l'inferiore) è la metà del precedente, ma l'altro è minore dell'altra metà, perciò la loro somma è minore del primo prisma esterno: invece al primo prisma interno se ne sostituiscono due, di cui l'uno (il superiore) è la metà del precedente, mentre l'altro è maggiore dell'altra

metà, perciò la loro somma è maggiore del prisma interno precedente. Così dicasi per ogni nuova sezione.

In ogni caso poi la somma dei prismi esterni è maggiore del tetraedro, e la somma dei prismi interni minore.

Di più, se si indicano per brevità con $P_1, P_2, \dots, P_n$ i prismi esterni a cominciare dall'inferiore, e con $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$, gl'interni corrispondenti, si ha che

$$P_2 = p_1, \quad P_3 = p_2, \dots, \quad P_n = p_{n-1},$$

per cui la differenza tra la somma dei primi e quella dei secondi è data da P_1 . Ma al raddoppiare indefinitamente di n , l'altezza di P_1 decresce illimitatamente; per conseguenza P_1 è le differenze tra le due somme decrescono illimitatamente (n. 619). Le due serie di somme sono adunque convergenti, ed il tetraedro, che è sempre compreso fra esse, è il loro limite, cioè:

Il tetraedro è il limite delle somme dei prismi esterni ed interni al medesimo al raddoppiare indefinitamente del numero dei detti prismi.

621. TEOREMA. *Due tetraedri di basi equivalenti e di altezze eguali sono equivalenti.*

Si dividano le altezze eguali dei due tetraedri nello stesso numero di parti eguali e si costruiscano i prismi esterni ed interni. Considerando questi prismi nel medesimo ordine, si ha che il 1.°, 2.°, 3.°.... prisma esterno od interno di un tetraedro è equivalente al 1.°, al 2.°, 3.°.... prisma esterno od interno dell'altro, perchè hanno rispettivamente le basi equivalenti (n. 498) e le altezze eguali (n. 613): perciò anche le due somme de' prismi interni e quelle degli esterni sono equivalenti, e questo qualunque sia il numero dei detti prismi. E allora anche i due

tetraedri, come limiti di due coppie di serie convergenti equivalenti, sono equivalenti (n. 270).

COROLLARIO. *Due tetraedri eguali-opposti sono equivalenti.*

622. TEOREMA. *Due piramidi di basi equivalenti e di altezze eguali sono equivalenti.*

Se si immaginano le basi delle due piramidi decomposte nello stesso numero di triangoli rispettivamente eguali, si comprende come le piramidi stesse siano scomponibili nello stesso numero di tetraedri di altezze eguali e a due a due di basi eguali: perciò le due piramidi, come somme di tetraedri equivalenti, sono equivalenti.

623. TEOREMA. *Una piramide equivale alla terza parte del prisma della stessa base e della stessa altezza.*

Cominciamo dal caso della piramide triangolare.

Sia $ABCDEF$ (fig. 264) un prisma triangolare. Si conduca il piano AEC , che decompone il prisma in due piramidi, una triangolare, cioè la $EABC$, e l'altra quadrangolare, cioè la $EACFD$. Si conduca ora il piano CED , che decompone quest'ultima piramide nelle due triangolari $ECDA$, $ECDF$. Queste due piramidi hanno le basi (CDA, CDF) eguali e la medesima altezza, perciò sono equivalenti. D'altra parte

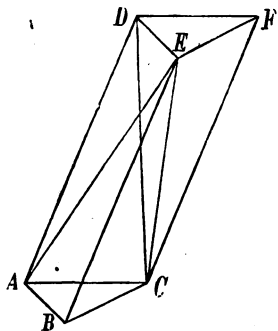


Fig. 264.

nella piramide $ECDF$ si può prendere come base DEF , e allora le due piramidi $CDEF$, $EABC$ sono

pure equivalenti, avendo per basi le basi del prisma e la stessa altezza del prisma. Dunque le tre piramidi in cui è decomposto il prisma sono equivalenti; di conseguenza una di esse, per es. la EABC, è la terza parte del prisma della stessa base e della stessa altezza.

Se la piramide è poligonale, s'immagini un prisma della stessa base e della stessa altezza, e si decompongano sì l'una che l'altro con piani diagonali in piramidi e prismi triangolari rispettivamente. Ogni piramide triangolare corrisponderà così ad un prisma triangolare di base eguale e di altezza eguale, del quale è la terza parte; perciò la somma delle prime, cioè la piramide data, sarà la terza parte della somma dei secondi, cioè dal prisma poligonale.

COROLLARIO. *Una piramide equivale alla terza parte del parallelepipedo rettangolo di base equivalente e della stessa altezza.*

OSSERVAZIONE. Valgono anche per le piramidi i teoremi n. 617 e 618 sui parallelepipi.

624. TEOREMA. *Il tronco di piramide equivale alla somma di tre piramidi aventi la stessa altezza del tronco e per basi rispettive le due basi del tronco e la loro media proporzionale.*

Cominciamo dal caso del tronco di tetraedro.

Sia ABCDEF (fig. 265) un tronco di tetraedro; si conduca il piano EAC, che decompone il tronco nella piramide triangolare EABC e nella quadrangolare EADFC;

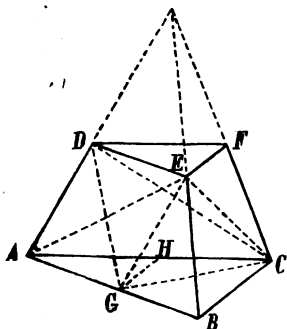


Fig. 265.

ed il piano ECD che decompone quest'ultima piramide nelle due EDFC, EDAC. Il tronco è così decomposto nei tre tetraedri EABC, CDEF, EDAC; i primi due hanno la stessa altezza del tronco e per basi quelle del tronco. Rimane il terzo EDAC; se si conduce da E la EG parallela a DA e si unisce G con C e con D, si ha un nuovo tetraedro GDAC equivalente ad EDAC per avere la stessa base DAC ed eguali altezze, per essere i vertici E, G sopra una retta parallela al piano della base (n. 407). Ma in questo tetraedro, se si prende AGC come base, l'altezza corrispondente è anche quella del tronco; finalmente se da G si conduce la GH parallela a BC, risulta che AGC è media proporzionale fra ABC ed AGH (n. 347 Cor.), ed anche fra ABC e DEF, per essere manifestamente eguali i due triangoli AGH e DEF; dunque il tronco equivale ecc.

Se il tronco è poligonale (fig. 266), si decomponga in tronchi triangolari conducendo i piani diagonali da uno spigolo laterale; sieno per brevità T_1, T_2, T_3 e t_1, t_2, t_3 rispettivamente i triangoli in cui sono decomposte le due basi, che chiameremo con B e b . Pel caso precedente il tronco dato si può considerare come somma dei tetraedri che hanno la stessa altezza del tronco e che hanno per basi:

- 1.° i triangoli T_1, T_2, T_3 .
- 2.° i triangoli t_1, t_2, t_3 .
- 3.° le medie proporzionali fra T_1 e t_1 , T_2 e t_2 , T_3 e t_3 che indicheremo con m_1, m_2, m_3 .

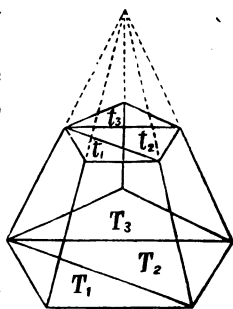


Fig. 266.

Ai primi si può sostituire (n. 623, Osserv.), la piramide che ha per base

$$T_1 + T_2 + T_3 = B$$

ai secondi la piramide che ha per base

$$t_1 + t_2 + t_3 = b$$

agli ultimi la piramide che ha per base

$$m_1 + m_2 + m_3.$$

Rimane dunque a provare che $m_1 + m_2 + m_3$ è media proporzionale fra B e b . Per questo si osservi che, se si indicano con L ed l due lati omologhi delle due basi del tronco, si ha

$$\frac{T_1}{m_1} = \frac{L}{l}$$

(nella fig. 265 $\frac{ABC}{AGC} = \frac{AB}{AG} = \frac{AB}{DE}$)

analogamente

$$\frac{T_2}{m_2} = \frac{T_3}{m_3} = \frac{L}{l}$$

perciò

$$\frac{T_1}{m_1} = \frac{T_2}{m_2} = \frac{T_3}{m_3}$$

da cui (n. 282, 4.º, b)

$$\frac{T_1 + T_2 + T_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{L}{l} \quad (1).$$

Così pure

$$\frac{m_1}{t_1} = \frac{L}{l}$$

(nella fig. 265 $\frac{AGC}{AGH} = \frac{AC}{AH}$, ossia $\frac{AGC}{DEF} = \frac{AC}{DF}$)

e similmente

$$\frac{m_1}{t_1} = \frac{m_2}{t_2} = \frac{m_3}{t_3} = \frac{L}{l}$$

da cui

$$\frac{m_1 + m_2 + m_3}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{L}{l} \quad (2)$$

dalle (1) e (2) finalmente si deduce

$$\frac{T_1 + T_2 + T_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{t_1 + t_2 + t_3}$$

la quale proporzione dimostra appunto che $m_1 + m_2 + m_3$ è media proporzionale tra B e b .

COROLLARIO. *Il tronco di piramide equivale alla tezza parte del parallelepipedo rettangolo della medesima altezza e che ha la base equivalente alla somma delle due basi del tronco e della loro media proporzionale.*

625. TEOREMA. *Il tronco di prisma triangolare equivale alla somma di tre tetraedri aventi per base una base del tronco e per vertici opposti quelli dell'altra base.*

Sia $ABCDEF$ (fig. 267) il tronco di prisma triangolare: si conducano i piani EAC , EAF che decompongono il tronco dato nei tre tetraedri $EABC$, $EACF$, $EADF$. Il primo ha per base ABC e per vertice E ; il secondo equivale al tetraedro $BACF$ (che si ottiene conducendo il piano AFB), per avere la stessa base ACF ed eguale altezza, per essere EB parallela al piano della base; ed in questo prendendo come base il triangolo ABC si ha F per vertice opposto. Il terzo finalmente equivale al tetraedro $BADF$ (ottenuto conducendo il piano BDF) per avere la stessa base ADF ed eguale

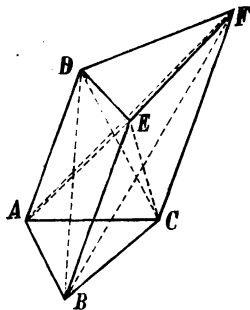


Fig. 267.

altezza; e questo, che leggeremo $FABD$, alla sua volta equivale al tetraedro $CABD$ (ottenuto conducendo il piano BDC) per avere la stessa base ABD ed eguale altezza, per essere CF parallela al piano della base: e nel tetraedro $CABD$, prendendo ABC come base, si ha D come vertice opposto. Perciò si può concludere che il tronco dato equivale alla somma dei tetraedri $EABC$, $FABC$, $DABC$.

COROLLARIO. *Il tronco di prisma triangolare equivale alla terza parte del parallelepipedo rettangolo di base equivalente e che ha per altezza la somma delle distanze dei tre vertici della seconda base dalla prima.*

OSSERVAZIONE. Se la faccia ABC è perpendicolare agli spigoli laterali, nel qual caso il tronco si dice *retto*, essa è anche la sezione retta e le altezze dei tetraedri sono gli stessi spigoli laterali; perciò:

626. TEOREMA. *Il tronco di prisma triangolare retto equivale alla somma di tre tetraedri aventi per base la sezione retta e per altezze i tre spigoli laterali.*

Il teorema si estende al tronco obliquo, decomponendolo in due tronchi retti ed addizionando opportunamente i tetraedri.

COROLLARIO. *Il tronco di prisma triangolare equivale al terzo del parallelepipedo rettangolo che ha la base equivalente alla sezione retta e l'altezza alla somma degli spigoli laterali.*

627. TEOREMA. *Il poliedro circoscritto alla sfera equivale al terzo del parallelepipedo rettangolo che ha la base equivalente alla superficie del poliedro e l'altezza all'apotema.*

Infatti, unendo il centro della sfera iscritta coi

vertici del poliedro, questo viene decomposto in tante piramidi quante sono le sue facce. Si costruisca un poligono piano somma delle facce del poliedro e su di questo, come base, una piramide coll' altezza eguale all'apotema del poliedro. E' chiaro che questa piramide è decomponibile in altrettante piramidi, quante sono quelle costituenti il poliedro, e che tali piramidi a due a due sono equivalenti per avere basi ed altezze eguali; perciò il poliedro e la piramide sono equivalenti. Ma questa equivale al terzo del parallelepipedo rettangolo di base equivalente e della stessa altezza, dunque anche il poliedro equivale ecc.

628. TEOREMA. *Un poliedro si può trasformare in un parallelepipedo rettangolo; cioè si può costruire un parallelepipedo rettangolo equivalente ad un poliedro dato.*

Preso un punto interno al poliedro lo si unisca coi vertici: il poliedro è così decomposto in tante piramidi quante sono le facce. Si trasformino queste piramidi in parallelepipedi rettangoli della stessa base (n. 632 cor. e n. 614): la somma di questi parallelepipedi equivale al poliedro dato.

629. TEOREMA. *Dati due poliedri, essi, o sono equivalenti, oppure l'uno è maggiore dell'altro, e in questo caso si può assegnare la loro differenza.*

Infatti siano A e B i due poliedri: si trasformino in due parallelepipedi rettangoli d'egual base (n. 614) e sieno questi A' e B' . Sovrapponendo i due parallelepipedi colla base in comune, essi o coincidono, oppure l'uno, per esempio A' contiene l'altro B' ; cioè è $A' > B'$. Nel primo caso i due poliedri sono equivalenti, nel secondo è $A > B$, e la diffe-

renza $A' - B$ equivale a quella dei parallelepipedi.

Dopo ciò anche i poliedri, trattandosi della loro estensione, sono grandezze per le quali valgono le proposizioni del n. 71, qualora alla parola *eguale* si sostituisca *equivalente*.

OSSERVAZIONE. I poliedri non decomponibili in prismi sono grandezze della terza specie (n. 269 e seg.).

§ 4.º Misura dei poliedri.

630. La misura di un poliedro ed in generale di un solido si dice il suo *volume*. Due solidi equivalenti hanno volumi eguali.

La misura dei poliedri si trova indirettamente, come per le superficie, eseguendo opportune operazioni sulle misure di certi loro elementi lineari.

Si è già veduto come un poliedro sia trasformabile in un parallelepipedo rettangolo: la questione è ridotta perciò alla ricerca del volume di questo poliedro. A tale scopo premettiamo i seguenti teoremi.

631. TEOREMA. *I parallelepipedi rettangoli della stessa base sono proporzionali alle corrispondenti altezze.*

Siano dei parallelepipedi aventi le basi eguali ad $ABCD$ (fig. 268) e le altezze AA' , $A'A''$, $A''A'''$

È chiaro che se $AA' = A''A'''$ anche i parallelepipedi corrispondenti sono eguali: di più

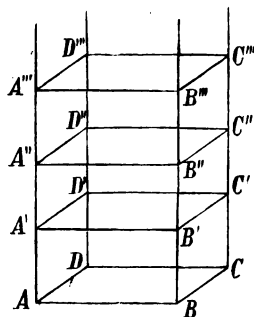


Fig. 268.

all'altezza $AA'' = AA' + A'A''$ corrisponde il pllpo somma dei corrispondenti ad AA' e $A'A''$. Dunque se P, P' sono due di questi parallelepipedi ed, h, h' , le loro altezze, si ha (n. 283 e 284)

$$P : P' = h : h'$$

COROLLARIO. *Lo stesso teorema vale per parallelepipedi qualunque, prismi e piramidi di basi eguali od equivalenti.* (n. 611, cor. 2, n. 613, cor. e n. 623 cor.).

632. TEOREMA. *I parallelepipedi rettangoli della stessa altezza sono proporzionali alle corrispondenti basi.*

Sieno P, P' due pllpi rettangoli; a, b, c gli spigoli del primo; a, b', c' quelli del secondo. Ritenuto lo spigolo a come altezza dei due pllpi, le corrispondenti basi sono le facce $b.c$ e $b'.c'$ che indicheremo rispettivamente con R, R' . Si costruisca un pllpo P'' cogli spigoli a, b, c' . Dai pllpi P, P'' , ritenuta come base la faccia $a.b$, si ha:

$$P : P'' = c : c'$$

e dai pllpi P'', P' , ritenuta come base la faccia $a.c'$, si ha:

$$P'' : P' = b : b'$$

ma (n. 274, 1.°)

$$\frac{P}{P'} = \frac{P}{P''} \times \frac{P''}{P'}$$

sostituendo

$$\frac{P}{P'} = \frac{c}{c'} \times \frac{b}{b'}$$

di più, pel teor. n. 301,

$$\frac{R}{R'} = \frac{c}{c'} \times \frac{b}{b'}$$

perciò sostituendo

$$\frac{P}{P'} = \frac{R}{R'}$$

COROLLARIO. *Lo stesso teorema vale per parallelepipedì qualunque, prismi e piramidi della stessa altezza.*

633. TEOREMA. *Il rapporto di due parallelepipedì rettangoli è eguale al prodotto dei rapporti dei tre spigoli dell' uno a quelli dell' altro.*

Sieno per brevità P e P' due parallelepipedì rettangoli; a, b, c , gli spigoli del primo, a', b', c' quelli del secondo. Si immagini un parallelepipedo P'' cogli spigoli a', b, c . Per i teoremi precedenti si ha

$$\frac{P}{P''} = \frac{a}{a'}, \quad \frac{P''}{P'} = \frac{b}{b'} \times \frac{c}{c'}$$

ma (n. 274, 1.º)

$$\frac{P}{P'} = \frac{P}{P''} \times \frac{P''}{P'}$$

dunque sostituendo

$$\frac{P}{P'} = \frac{a}{a'} \times \frac{b}{b'} \times \frac{c}{c'}$$

COROLLARIO. *Il rapporto di due cubi è eguale alla terza potenza (cubo) del rapporto degli spigoli: cioè se a, a' sono gli spigoli di due cubi, si ha*

$$\frac{a^3}{a'^3} = \left(\frac{a}{a'} \right)^3$$

634. In seguito a questo si è assunto come unità di misura il parallelepipedo i cui spigoli sieno eguali all' unità lineare, cioè il cubo dell' unità lineare: così che detto M^3 questo cubo ed m l' unità lineare, si ha

$$\frac{P}{M^3} = \frac{a}{m} \times \frac{b}{m} \times \frac{c}{m}$$

cioè

La misura di un parallelepipedo rettangolo è il prodotto delle misure dei suoi tre spigoli: il che si esprime comunemente dicendo:

Il volume del parallelepipedo rettangolo è dato dal prodotto dei tre spigoli o dimensioni.

In particolare: Il volume di un cubo è dato dalla terza potenza (dal cubo) del suo spigolo.

Siccome poi il prodotto di due spigoli dà l'area di una faccia, che si può assumere come base, ed in tal caso il terzo spigolo è l'altezza corrispondente, così si dice anche che:

Il volume di un parallelepipedo rettangolo è dato dal prodotto della base per l'altezza corrispondente,

COROLLARIO. Dai teoremi sui poliedri equivalenti si ha:

1.° *Il volume di un parallelepipedo qualunque è dato dal prodotto della base per l'altezza (n. 611, Cor. 2.°).*

2.° *Il volume di un prisma è dato dal prodotto della base per l'altezza, oppure dal prodotto della sezione retta per lo spigolo (n. 613, Cor.).*

3.° *Il volume di una piramide è dato dal terzo del prodotto della base per l'altezza (n. 623, Cor.).*

4.° *Il volume del tronco di piramide è dato dal terzo del prodotto dell'altezza per la somma delle due basi e della loro media proporzionale (n. 624, Cor.).*

Indicando cioè con V il volume del tronco, h l'altezza, b e B le basi, si ha

$$V = \frac{1}{3} h (B + b + \sqrt{bB})$$

OSSERVAZIONE. Se L ed l sono due lati omologhi delle basi, per la somiglianza di queste si ha

$$B : b = L^2 : l^2$$

e ponendo $L : l = q$ si ha

$$B : b = q^2, \quad \text{da cui} \quad B = bq^2$$

Sostituendo questo valore di B nella formola precedente, essa diventa

$$V = \frac{1}{3} bh (1 + q + q^2)$$

formola usata talvolta invece della prima.

5.° *Il volume del tronco di prisma triangolare è dato dal terzo del prodotto dell'area di una base per la somma delle distanze dei vertici della seconda base dalla prima* (n. 625, Cor.).

Indicando cioè con B l'area di una base e con h_1, h_2, h_3 , le distanze da B dei vertici dell'altra base, si ha

$$V = \frac{1}{3} B (h_1 + h_2 + h_3)$$

ed anche

6.° *Il volume del tronco di prisma triangolare è dato dal terzo del prodotto della sezione retta per la somma degli spigoli laterali* (n. 626 Cor.).

Indicando cioè con S l'area della sezione retta e con l_1, l_2, l_3 , gli spigoli laterali, si ha

$$V = \frac{1}{3} S (l_1 + l_2 + l_3)$$

7.° *Il volume del poliedro circoscritto alla sfera è dato dal terzo del prodotto dell'area della superficie del poliedro per l'apotema* (n. 627).

CAPITOLO V.

I CORPI ROTONDI E LE LORO SUPERFICIE - LORO MISURA

§ 1. Superficie dei corpi rotondi - Loro misura.

635. SUPERFICIE LATERALE DEL CONO. — TEOREMA.

Le superficie laterali delle piramidi a base regolare circoscritte ed iscritte ad un cono al raddoppiare del numero dei lati delle loro basi sono convergenti.

Indicando con P_n , p_n i perimetri delle basi di due serie di piramidi a base regolare, le une circoscritte e le altre inscritte in un cono di vertice V (fig. 269); con a_n la serie degli apotemi delle piramidi iscritte, con a l'apotema del cono, le superficie laterali delle dette piramidi sono equivalenti rispettivamente ai rettangoli

$$\frac{1}{2} P_n \cdot a \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} p_n \cdot a_n.$$

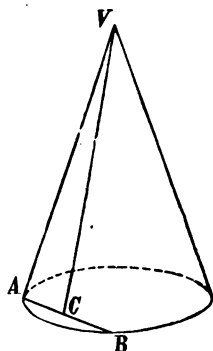


Fig. 269.

Ora al raddoppiare di n (numero dei lati delle basi) le due serie sono convergenti (n. 268, 3.°), perchè P_n e p_n sono convergenti (n. 377), ed a_n cresce limitatamente ed ha per limite a . Infatti se $AB = l_n$ (fig. 269) è un lato del poligono p_n e $VC = a_n$, è $a > a_n$ e dal triangolo VAC si ha

$$VA - VC < AC, \quad \text{ossia} \quad a - a_n < \frac{1}{2} l_n$$

ma l_n decresce illimitatamente al raddoppiare di n , lo stesso avviene dunque di $a - a_n$ cioè a è il limite di a_n (n. 260).

Le dette serie perciò hanno un limite. Se si osserva ora che al raddoppiare di n , le superficie di dette piramidi si accostano sempre più e tendono a confondersi colla superficie laterale del cono, la quale è sempre compresa fra esse (di posizione), si è condotti ad ammettere il seguente

POSTULATO. *La superficie laterale del cono è il limite delle superficie laterali delle piramidi a basi regolari circoscritte ed iscritte, al raddoppiare indefinitamente del numero dei lati delle loro basi.*

OSSERVAZIONE. Se si descrive un settore circolare, di cui il raggio sia eguale al lato del cono e l'arco sia equivalente alla circonferenza base, è chiaro che il settore è il limite degli sviluppi delle superficie piramidali già considerate (n. 495), e perciò è equivalente alla superficie laterale del cono. Tale settore si dice *lo sviluppo laterale del cono*.

636. TEOREMA. *La superficie laterale del cono equivale al rettangolo della semicirconferenza base e dell'apotema.*

Infatti è manifesto che tale rettangolo, come la superficie laterale del cono, è limite delle superficie laterali delle piramidi circoscritte ed iscritte, perchè minore delle prime e maggiore delle seconde, dunque (num. 265, Cor.) *la superficie laterale del cono ecc.*

COROLLARIO. *La superficie laterale del cono equivale al rettangolo dell'apotema e della circonferenza*

della sezione media, cioè della sezione equidistante dal vertice e dalla base; perchè il raggio di questa circonferenza è la metà del raggio della base, e perciò la stessa circonferenza equivale alla metà della circonferenza base.

AREA DELLA SUPERFICIE LATERALE DEL CONO. —

L'area laterale del cono è data dalla metà del prodotto della circonferenza base per l'apotema: ossia detto r il raggio della base ed a l'apotema, si ha

$$\text{Area lat. cono} = \pi r a$$

637. SUPERFICIE LATERALE DEL TRONCO DI CONO.

— Con un procedimento analogo a quello tenuto pel teorema 635 si può dimostrare il teorema:

Le superficie laterali dei tronchi di piramide circoscritti ed iscritti ad un tronco di cono al raddoppiare del numero dei lati delle loro basi sono convergenti.

In seguito a ciò ammettere il

POSTULATO. *La superficie laterale d'un tronco di cono è il limite delle superficie laterali dei tronchi di piramide circoscritti ed iscritti, come al teorema precedente.*

OSSERVAZIONE. La parte di corona circolare compresa fra due archi (simili) equivalenti alle circonferenze basi del tronco di cono, e di cui l'altezza sia eguale all'apotema del tronco, è chiaro che è il limite degli sviluppi delle superficie laterali dei tronchi di piramide (n. 501); epperò equivale alla superficie laterale del tronco di cono. Tale parte di corona circolare dicesi lo *sviluppo laterale del tronco di cono*.

638. TEOREMA. *La superficie laterale d'un tronco*

di cono equivale al rettangolo della semisomma delle circonferenze basi e dell'apotema.

Si può dimostrare come il teorema n. 636.

Ma più speditamente si dimostra nel modo seguente:

Sia $AOO'A'$ (fig. 270) un tronco di cono, o per meglio dire il trapezio rettangolo che genera il

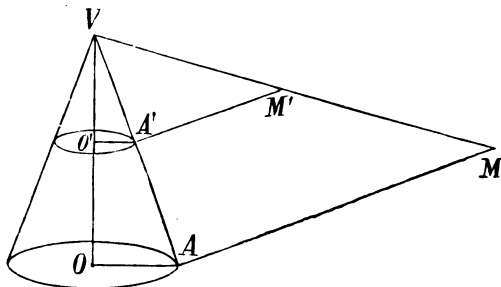


Fig. 270.

tronco di cono rotando intorno ad OO' (n. 535). Si prolunghino l'asse OO' ed AA' ad incontrarsi in V . La superficie laterale del tronco di cono è la differenza tra le superficie laterali dei coni generati dai triangoli VOA , $VO'A'$. Si conduca da A la perpendicolare a VA e su questa si prenda AM equivalente alla circonferenza OA ; si unisca V con M e da A' si conduca la parallela ed AM ad incontrare in M' la VM .

Dai triangoli simili VAM , $VA'M'$ si ha:

$$AM : A'M' = VA : VA'$$

e dai triangoli simili VOA , $VO'A'$

$$OA : O'A' = VA : VA'$$

dalle due proporzioni si deduce

$$AM : A'M' = OA : O'A'$$

ed anche (n. 339)

$$AM : A'M' = \text{circ. } OA : \text{circ. } O'A$$

ma

$$AM = \text{circ. } OA$$

dunque (n. 282, 1.º Teor.).

$$A'M' = \text{circ. } O'A'$$

Ciò posto, le superficie laterali dei coni VOA, VO'A' sono equivalenti ai triangoli VAM, VA'M', (n. 636), perciò la superficie laterale del tronco di cono (differenza delle superficie laterali dei due coni) equivale al trapezio AMM'A' (differenza dei due triangoli), e perciò anche al rettangolo dell'apotema AA' (altezza del trapezio) e di $\frac{1}{2}(AM + A'M')$ equivalente alla semisomma delle circonferenze basi.

COROLLARIO. — *La superficie laterale del tronco di cono equivale al rettangolo dell'apotema e della circonferenza della sezione media, cioè equidistante dalle due basi; perchè il raggio di questa circonferenza è eguale alla semisomma dei raggi delle basi* (n. 200, Cor.).

AREA DELLA SUPERFICIE LATERALE DEL TRONCO DI CONO. — *L'area laterale del tronco di cono è data dal prodotto della semisomma delle circonferenze basi per l'apotema: ossia, detti r ed r' i raggi delle basi ed a l'apotema, si ha*

$$\text{Area lat. tronc. cono} = \pi (r + r')a$$

639. SUPERFICIE LATERALE DEL CILINDRO. — **TEOREMA.** *Le superficie laterali dei prismi a basi regolari circoscritti ed iscritti ad un cilindro al raddoppiare del numero dei lati delle basi sono convergenti.*

Si dimostra come il teorema 635, e con analo-

ghe considerazioni si è condotti ad ammettere il seguente

POSTULATO. *La superficie laterale del cilindro è il limite delle superficie laterali dei prismi di cui al teorema 633.*

OSSERVAZIONE. Il rettangolo, di cui la base sia equivalente alla circonferenza base del cilindro e l'altezza eguale al lato, è il limite degli sviluppi delle superficie laterali dei prismi circoscritti ed iscritti al cilindro (n. 551 e 552), e si dice *lo sviluppo laterale del cilindro*.

640. TEOREMA. *La superficie laterale del cilindro equivale al rettangolo della circonferenza base e del lato.*

Tale rettangolo infatti, come la superficie laterale del cilindro, è limite delle superficie laterali dei prismi circoscritti ed iscritti, perchè minore dei primi e maggiore dei secondi, dunque (n. 265, Cor.) *la superficie laterale del cilindro ecc.*

AREA DELLA SUPERFICIE LATERALE DEL CILINDRO. — *L'area laterale del cilindro è data dal prodotto della circonferenza base per l'altezza (o lato): ossia, detto r il raggio della base ed a l'altezza, si ha*

$$\text{Area lat. cilindro} = 2\pi ra$$

641. SUPERFICIE SFERICA ED ALCUNE SUE PARTI. — TEOREMA. *La superficie generata da un segmento AB (fig. 271), che compie un giro rotando intorno ad un asse xy col quale si trova in uno stesso piano, da una banda dell'asse e non perpendicolare all'asse stesso, equivale al rettangolo della proiezione $A'B'$ del segmento sull'asse e della circonferenza che ha per raggio la perpendicolare CM al segmento condotta pel suo punto medio C fino all'incontro coll'asse.*

Il segmento AB può presentare tre posizioni diverse rispetto all'asse (fig. 271), in ognuna delle quali la superficie generata equivale al rettangolo di AB e della circonferenza di raggio CC', dove CC' è la perpendicolare all'asse condotta per C, (Vedi n. 638, corol. per la fig. a) — n. 636, Coroll. per la fig. b) — e n. 640 per la fig. c); cioè
 sup. AB = AB. circ. CC'.

Ora nel caso a), condotto AB'' parallelo all'asse dai

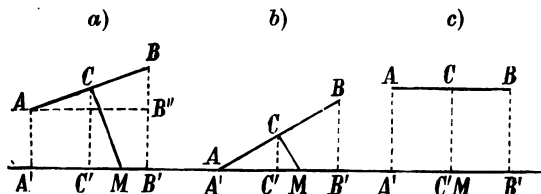


Fig. 271.

triangoli simili BAB'', CMC' si ha

$$AB : CM = AB'' : CC$$

ed anche (n. 379)

$$AB : \text{circ. CM} = AB'' : \text{circ. CC}$$

da cui (n. 292, 2.^o Teor).

$$AB. \text{circ. CC}' = A'B'. \text{circ. CM}.$$

Il caso b) si riduce al precedente osservando che AB'' si confonde con A'B': nel caso c) è chiaro che

$$AB = A'B' \text{ e } CC' = CM$$

dunque sostituendo si ha

$$\text{sup. AB} = A'B'. \text{circ. CM}.$$

642. TEOREMA. *La superficie generata da una spezzata regolare ABCD (fig. 272), che compie un giro intorno ad un diametro del cerchio iscritto che non la attraversa, equivale al rettangolo della proiezione*

$A'D'$ della spezzata sull'asse (somma delle proiezioni dei suoi lati) e della circonferenza iscritta.

Infatti se OM è l'apotema della spezzata si ha (n. 641)

$$\text{sup. } AB = A'B' \cdot \text{circ. } OM$$

$$\text{sup. } BC = B'C' \cdot \text{circ. } OM$$

$$\text{sup. } CD = C'D' \cdot \text{circ. } OM$$

ed addizionando (n. 209)

$$\text{sup. } ABCD = (A'B' + B'C' + C'D') \cdot \text{circ. } OM = A'D' \cdot \text{circ. } OM$$

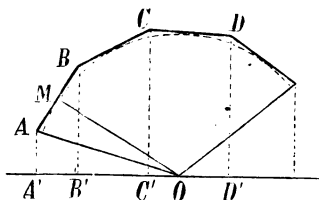


Fig. 272.

643. TEOREMA. *Le superficie generate dai semiperimetri di due serie di poligoni regolari simili circoscritti ed iscritti ad una semicirconferenza colla rotazione di un giro intorno al diametro di questa, quando il numero dei loro lati vada raddoppiando indefinitamente, sono convergenti.*

Siano $(ABCDE)'$, $ABCDE$ (fig. 273) due semiperimetri regolari simili, l'uno circoscritto e l'altro iscritto alla semicirconferenza di diametro AE , e sia OM l'apotema della spezzata iscritta. Si sa che

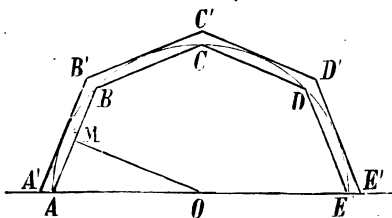


Fig. 273.

$$\text{sup. } (ABCDE)' = A'E' \cdot \text{circ. } OA$$

$$\text{sup. } ABCDE = AE \cdot \text{circ. } OM.$$

Ora al raddoppiare del numero dei lati delle due

spezzate $A'E'$ decresce limitatamente, perchè $A'E' > AE$; di più $A'E' - AE = 2(OA' - OA) < A'B'$; e poichè i lati dei poligoni regolari circoscritti ($A'B'$) decrescono illimitatamente (vedi nota al teor. 376), ciò avviene pure delle differenze, come $A'E' - AE$; dunque $A'E'$ ha per limite AE ; di più la circonf. OM cresce limitatamente ed ha per limite la circ. OA , perchè OM ha per limite OA : perciò le due serie di rettangoli sono convergenti (n. 268, 3.º).

Le dette serie hanno dunque un limite. Se si riflette ora che queste superficie si accostano indefinitamente e tendono a confondersi colla superficie sferica generata dalla semicirc. AE , la quale è sempre compresa fra esse (di posizione), si è condotti ad ammettere il seguente

POSTULATO. *La superficie sferica è il limite delle superficie generate dalla rotazione dei semiperimetri poligoni regolari simili circoscritti ed iscritti alla semicirconferenza, dove il numero dei lati vada raddoppiando indefinitamente.*

644. TEOREMA. *La superficie sferica equivale al rettangolo della circonferenza massima e del diametro.*

Tale rettangolo infatti, come la superficie sferica, è limite delle superficie di cui al Teorema 643 perchè minore delle prime e maggiore delle seconde.

OSSERVAZIONE. Poichè il cerchio equivale al rettangolo della circonferenza e di metà raggio ossia del quarto del diametro, si ha pure che:

La superficie sferica equivale al cerchio di raggio doppio, ossia a quattro volte il suo cerchio massimo.

AREA DELLA SFERA. *L'area sferica è data dal prodotto della circonferenza massima pel diametro; ossia, detto r il raggio della sfera, si ha*

$$\text{Area sferica} = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$$

645. TEOREMA. *La superficie della zona o della calotta sferica equivale al rettangolo della circonferenza massima e dell'altezza.*

Si dimostra ripetendo il ragionamento fatto pei teoremi 643 e 644, sostituendo alla semicirconferenza l'arco generatore della zona o calotta, ed ai semiperimetri le spezzate regolari simili circoscritte ed iscritte all'arco.

COROLLARIO. *Le zone o calotte di una superficie sferica (o di superficie sferiche eguali) sono proporzionali alle loro altezze.*

AREA DELLA ZONA E DELLA CALOTTA SFERICA. *L'area della zona o della calotta sferica è data dal prodotto della circonferenza massima per l'altezza: ossia, detto r il raggio della sfera ed h l'altezza della zona o della calotta, si ha*

$$\text{Area zona o calotta} = 2\pi rh$$

OSSERVAZIONE. Sia CB (fig. 246) l'arco generatore della calotta CBE e BH l'altezza. Si ha

$$\text{Area calotta} = \pi AB \cdot BH$$

ma (n. 280, 2.º):

$$AB \cdot BH = CB^2,$$

perciò sostituendo

$$\text{Area calotta} = \pi CB^2$$

da cui:

La calotta equivale al cerchio che ha per raggio la corda dell'arco generatore.

In particolare:

La superficie sferica equivale al cerchio di raggio doppio.

646. TEOREMA. *La superficie del fuso sferico equivale al rettangolo dell' arco equatoriale e del diametro.*

Infatti detto a l' arco equatoriale, si ha (n. 569)
 $\text{sup. fuso} : \text{sup. sferica} = a : \text{circonf. massima}$
 ed anche, detto r il raggio della sfera,

$\text{sup. fuso} : \text{sup. sferica} = 2r.a : 2r. \text{ circ. mass.}$
 e poichè i conseguenti sono equivalenti (n. 644) lo stesso è degli antecedenti, ossia

$$\text{sup. fuso} = 2r.a.$$

AREA DEL FUSO SFERICO. *L' area del fuso sferico è data dal prodotto dell' arco equatoriale pel diametro; ossia detti r il raggio della sferica ed a la lunghezza dell' arco equatoriale, si ha*

$$\text{Area fuso} = 2ra$$

OSSERVAZIONE. Se dell' arco equatoriale è data la misura circolare (che è anche quella del fuso) e sia n in gradi, si ha

$$\text{Area fuso} = \frac{n}{360} \times 4\pi r^2 = \frac{n}{90} \pi r^2$$

647. TEOREMA. *Due triangoli opposti sono equivalenti.*

Infatti si è già osservato (n. 584, Oss.) che se ABC (fig. 251) è un triangolo sferico, P il centro della circonferenza iscritta e PL , PM , PN le sue distanze sferiche dai lati AB , AC , BC , il triangolo ABC è decomponibile in sei triangoli isosceli. Il triangolo opposto $A'B'C'$ può essere decomposto nello stesso modo in sei triangoli isosceli che sono rispettivamente opposti ai primi, ed eguali ai medesimi ciascuno a ciascuno (n. 579). Dunque i due triangoli essendo decomponibili nello stesso numero di parti eguali sono equivalenti.

648. TEOREMA. *Due poligoni sferici opposti sono equivalenti.*

Infatti essi si possono decomporre nello stesso numero di triangoli sferici opposti ciascuno a ciascuno.

649. TEOREMA. *Il triangolo sferico equivale alla metà del fuso corrispondente al suo eccesso sferico.*

Infatti sia ABC (fig. 274) un triangolo sferico ed $A'B'C'$ il suo opposto. È facile verificare sulla figura che la somma dei fusi $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ (che contengono il triangolo ABC) e dell' opposto al fuso $\widehat{C}$ (che è eguale al fuso $\widehat{C}$) si compone di mezza superficie sferica, cioè fuso $2R$, e dei due triangoli ABC , $A'B'C'$.

Perciò

$ABC + A'B'C' = \text{fuso } \widehat{A} + \text{fuso } \widehat{B} + \text{fuso } \widehat{C} - \text{fuso } 2R$
oppure, per essere $ABC = A'B'C'$ e pel teor. 569

$$2ABC = \text{fuso } (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - 2R)$$

e ricordando che $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - 2R$ è l'eccesso sferico del triangolo che indicheremo con $\widehat{E}$, si ha infine

$$ABC = \frac{1}{2} \text{fuso } \widehat{E}.$$

650. TEOREMA. *Il poligono sferico equivale alla metà del fuso corrispondente all'eccesso sferico.*

Infatti si decomponga il poligono sferico in triangoli mediante gli archi diagonali uscenti da un vertice. La somma di questi triangoli (cioè il poligono) equivale alla somma delle metà dei fusi che corrispondono agli eccessi sferici dei medesimi; oppure (n. 569) alla metà del fuso corrispondente alla somma dei detti eccessi sferici; ma questa somma è appunto l'eccesso sferico del poligono; dunque il poligono equivale alla metà del fuso corrispondente al suo eccesso.

651. TEOREMA. *Il poligono sferico equivale al rettangolo del raggio e dell'arco di circonf. massima corrispondente all'eccesso sferico.*

Infatti indicando con $\widehat{E}$ l'eccesso sferico del poligono si è dimostrato che

$$\text{polig. sf.} = \frac{1}{2} \text{fuso } \widehat{E}$$

se si indica ora con e l'arco equatoriale corrispondente ad E si sa che

$$\text{fuso } \widehat{E} = 2r.e$$

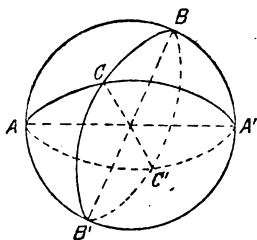


Fig. 274.

perciò sostituendo:

$$\text{polig. sf.} = r.e.$$

AREA DEL POLIGONO SFERICO. *L'area del poligono sferico è data dal prodotto del raggio per la lunghezza dell'arco di circonferenza massima corrispondente all'eccesso sferico; ossia, detti r il raggio della superficie sferica ed e la lunghezza dell'arco di circonferenza massima corrispondente all'eccesso sferico, si ha*

$$\text{Area polig. sf.} = re$$

OSSERVAZIONE. Se l'eccesso sferico è espresso in gradi e sia n° , si ha

$$\text{Area pol. sf.} = \frac{n}{180} \pi r^2.$$

OSSERVAZIONE. Per le figure di una stessa superficie sferica si trova talvolta conveniente assumere come unità di misura il triangolo sferico trirettangolo, che indicheremo con T .

652. TEOREMA. *La misura del fuso è il doppio di quella del suo angolo.*

Infatti (n. 570)

$$\text{fuso} : \text{fuso retto} = \text{angolo} : \text{angolo retto}$$

ma:

$$\text{fuso retto} = 2T,$$

perciò

$$\text{fuso} : 2T = \widehat{\text{angolo}} : R$$

da cui $\left(\text{per essere } \text{fuso} : 2T = \frac{1}{2} (\text{fuso} : T) \text{ (n. 278 Cor.)} \right)$

$$\text{fuso} : T = 2 (\widehat{\text{angolo}} : R).$$

653. TEOREMA. *La misura del poligono sferico è eguale a quella dell'eccesso sferico.*

Infatti se $\widehat{E}$ è l'eccesso sferico del poligono, si ha (n. 650):

$$\text{polig. sf.} = \frac{1}{2} \text{fuso } \widehat{E}$$

perciò

$$\text{polig. sf.} : T = \frac{1}{2} \text{fuso } \widehat{E} : T$$

ma (n. 646)

$$\frac{1}{2} \text{fuso } \widehat{E} : T = \widehat{E} : R$$

da cui finalmente:

$$\text{polig. sf. : } T = \widehat{E} : \widehat{R}.$$

§ 2 I corpi rotondi. — Loro misura.

654. CONO E TRONCO DI CONO. — TEOREMA. *Le piramidi a basi regolari simili circoscritte ed iscritte in un cono, dove il numero dei lati delle basi vada raddoppiando indefinitamente, sono convergenti, ed hanno per limite il cono.*

Indicando con S_n ed s_n le basi regolari simili di due serie di piramidi l'una circoscritta e l'altra iscritta e con h l'altezza comune, le dette piramidi equivalgono ai parallelepipedi $\frac{1}{3} S_n \cdot h$ e $\frac{1}{3} s_n \cdot h$ (n. 623, Cor.). Ora al raddoppiare di n (numero dei lati delle basi) S_n ed s_n sono convergenti (n. 376) ed h non varia; perciò le due serie sono convergenti (n. 619, 3.º); di più il cono è compreso fra le dette piramidi circoscritte ed iscritte, perchè minore delle prime e maggiore delle seconde, dunque è il loro limite.

COROLLARIO. *Il cono equivale alla piramide di base equivalente e della stessa altezza.*

Infatti, indicando con A il cerchio base del cono, il limite delle serie $\frac{1}{3} S_n \cdot h$, $\frac{1}{3} s_n \cdot h$ è anche $\frac{1}{3} A \cdot h$. (n. 619, 3.º), e perciò il cono equivale al pllpdo $\frac{1}{3} A \cdot h$.

VOLUME DEL CONO. *Il volume del cono è dato dal terzo del prodotto dell'area della base per l'altezza:*

ossia, indicando con r il raggio della base e con h l'altezza,

$$\text{Vol. cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

655. TEOREMA. *I tronchi di piramide regolari e a basi simili circoscritti ed iscritti in un tronco di cono, dove il numero dei lati delle basi vada raddoppiando indefinitamente, sono convergenti, ed hanno per limite il tronco di cono.*

Si dimostra come il Teorema 648, tenendo conto del numero 619 Corollario.

COROLLARIO. *Il tronco di cono equivale al tronco di piramide di basi equivalenti e della stessa altezza.*

VOLUME DEL TRONCO DI CONO. *Il volume del tronco di cono è dato dal terzo del prodotto della somma dei due cerchi base e del loro medio proporzionale per l'altezza:* ossia, indicando con r, r' i raggi delle basi e con h l'altezza,

$$\text{Vol. tronc. cono} = \frac{1}{3}\pi h (r^2 + r'^2 + rr').$$

OSSERVAZIONE. Talora è comodo introdurre nella formola il rapporto dei raggi (il rapporto di similitudine delle basi, come nel tronco di piramide): allora posto $r' : r = q$, si deduce $r' = rq$. Sostituendo nella formola precedente il valore di r' , essa diventa:

$$\text{Vol. tronc. cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h (1 + q + q^2)$$

656. CILINDRO. — TEOREMA. *I prismi a basi regolari e simili circoscritti ed iscritti in un cilindro, dove il numero dei lati delle basi vada raddoppiando indefinitamente, sono convergenti, ed hanno per limite il cilindro:*

Si dimostra come il Teorema 654 tenendo conto del n. 613 Cor.

COROLLARIO. *Il cilindro equivale al prisma di base equivalente e della stessa altezza.*

VOLUME DEL CILINDRO. *Il volume del cilindro è dato dal prodotto dell'area della base per l'altezza: ossia, ritenute le solite notazioni,*

$$\text{Vol. cilindro} = \pi r^2 h$$

657. SFERA E SOLIDI SFERICI. — TEOREMA. *Il solido generato dalla rotazione di un triangolo ABC (fig. 275, 276, 277) intorno ad un asse xy del suo piano, che passi per un vertice A e non lo attraversi, equivale ad un cono di base equivalente alla superficie generata dal lato BC, opposto ad A, e di altezza eguale all'altezza AH corrispondente a BC.*

Il triangolo ABC può presentare tre posizioni diverse rispetto all'asse:

1.° Un lato del triangolo, per es. AC, trovasi sull'asse (fig. 275). In questo caso secondo che l'altezza BD cade dentro o fuori del

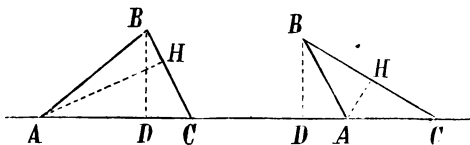


Fig. 275.

triangolo, il solido generato (sol. ABC) equivale alla somma o differenza dei coni generati dai triangoli CBD, ABD; perciò (n. 654, Cor.)

$$\begin{aligned} \text{sol. ABC} &= \frac{1}{3} \text{cerchio BD.CD} \pm \frac{1}{3} \text{cerchio BD.AD} \\ &= \frac{1}{3} \text{cerchio BD.AC.} \end{aligned}$$

che si può scrivere (n. 380)

$$\text{sol. } ABC = \frac{1}{3} \text{ circ. } BD. \frac{1}{2} BD. AC$$

e sostituendo a $\frac{1}{2} BD. AC$ l'equivalente $\frac{1}{2} BC. AH$ (n. 199), ed osservando che (n. 630) $\text{circ. } BD. \frac{1}{2} BC = \text{sup. } BC$, si ha appunto

$$\text{sol. } ABC = \frac{1}{3} \text{ sup. } BC. AH$$

2.° Il lato BC prolungato incontri l'asse in D (fig. 276). Si ha

$$\begin{aligned} \text{sol. } ABC &= \text{sol. } ABD - \text{sol. } ACD \\ &= \frac{1}{3} \text{ sup. } BD. AH - \frac{1}{3} \text{ sup. } CD. AH \end{aligned}$$

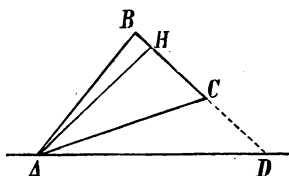


Fig. 276.

$$= \frac{1}{3} \text{ sup. } BC. AH.$$

3.° Il lato BC è parallelo all'asse (fig. 277). In questo caso secondo che l'altezza AH cade dentro o fuori del triangolo, il solido generato equivale alla somma o alla differenza dei solidi generati dai triangoli AHC, AHB, cioè di $\frac{2}{3}$ dei cilindri generati dai rettangoli AHCC', AHBB', perciò

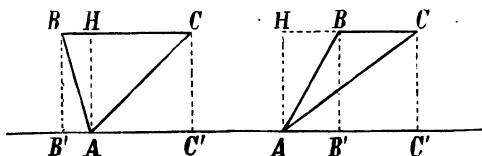


Fig. 277.

zha dei solidi generati dai triangoli AHC, AHB, cioè di $\frac{2}{3}$ dei cilindri generati dai rettangoli AHCC', AHBB', perciò

$$\begin{aligned} \text{sol. } ABC &= \frac{2}{3} \text{ cerchio } AH, HC \pm \frac{2}{3} \text{ cerchio } AH. HB \\ &= \frac{2}{3} \text{ cerchio } AH. BC \end{aligned}$$

o ancora osservando che (n. 380):

$$2 \text{ cerchio } AH = \text{circonf. } AH . AH$$

e che (n. 573):

$$\text{circonf. } AH . BC = \text{sup. } BC$$

sostituendo si ha

$$\text{sol. } ABC = \frac{1}{3} \text{ sup. } BC . AH$$

658. TEOREMA. *Il solido generato da un settore poligonale OABCD (fig. 272) circoscritto ad un cerchio, che compie un giro intorno ad un diametro di questo cerchio che non lo attraversi equivale al cono di base equivalente alla superficie generata dalla poligonale ABCD e di altezza eguale all'apotema OM.*

Infatti è chiaro che

$$\text{sol. } OABCD = \text{sol. } OAB + \text{sol. } OBC + \text{sol. } OCD$$

ossia

$$\begin{aligned} \text{sol. } OABCD &= \frac{1}{3} \text{ sup. } AB . OM + \frac{1}{3} \text{ sup. } BC . OM \\ &+ \frac{1}{3} \text{ sup. } CD . OM = \frac{1}{3} \text{ sup. } ABCD . OM \end{aligned}$$

659. TEOREMA. *I solidi generati dai semipoligoni regolari simili circoscritti ed iscritti in un semicerchio, che ruotano intorno al diametro di questo, dove il numero dei loro lati vada raddoppiando indefinitamente, sono convergenti ed hanno per limite la sfera generata dal semicerchio.*

Siano (ABCDE)', ABCDE (fig. 273) due semipoligoni regolari simili, l'uno circoscritto e l'altro iscritto nel semicerchio di diametro AE, e sia OM l'apotema del poligono iscritto.

Si ha

$$\text{sol. } (ABCDE)' = \frac{1}{3} \text{ sup. } (ABCDE)' . OA$$

$$e \quad \text{sol. } ABCDE = \frac{1}{3} \text{ sup. } ABCDE \cdot OM$$

Ora al raddoppiare del numero dei lati, superficie $(ABCDE)'$ e sup. $ABCDE$ sono convergenti (n. 643), ed OM cresce limitatamente ed ha per limite OA ; perciò le due serie di solidi sono convergenti (n. 618, 3.º). Di più la sfera è compresa fra le dette serie di solidi, perchè minore dei primi e maggiore dei secondi, dunque è il loro limite.

COROLLARIO. *La sfera equivale al cono di base equivalente alla superficie sferica e di altezza eguale al raggio.*

Infatti le serie $\frac{1}{3} \text{ sup. } (ABCDE)' \cdot OA$ e $\frac{1}{3} \text{ superficie } ABCDE \cdot OM$ hanno anche per limite $\frac{1}{3} \text{ superficie sferica} \cdot \text{raggio}$ (n. 618 3.º), perciò la sfera equivale al pllpdo $\frac{1}{3} \text{ sup. sferica} \cdot \text{raggio}$.

VOLUME DELLA SFERA. *Il volume della sfera è dato dal terzo del prodotto dell'area sferica per il raggio: ossia*

$$\text{Vol. sfera} = \frac{1}{3} 4\pi r^2 \cdot r = \frac{4}{3} \pi r^3$$

od anche in funzione del diametro $d = 2r$

$$\text{Vol. sfera} = \frac{1}{6} \pi d^3$$

660. TEOREMA. *Il settore sferico equivale al cono di base equivalente alla zona o calotta base e di altezza eguale al raggio.*

Si dimostra come il Teor. 659 sostituendo ai semipoligoni circoscritti ed iscritti in un semicerchio,

isettori poligonalı circoscritti ed iscritti in un settore circolare.

VOLUME DEL SETTORE SFERICO. — *Il volume del settore sferico è dato dal terzo del prodotto dell'area della zona (o calotta) base per il raggio: ossia*

$$\text{Vol. sett. sferico} = \frac{1}{3} r \times \text{area zona}$$

e sostituendo l'area della zona (n. 645)

$$\text{Vol. sett. sferico} = \frac{1}{3} r \times 2\pi rh = \frac{2}{3} \pi r^2 h$$

661. TEOREMA. *Lo spicchio equivale al cono di base equivalente al fuso base e di altezza eguale al raggio.*

Infatti si ha (n. 570)

$$\text{spicchio} : \text{sfera} = \text{fuso} : \text{sup. sferica}$$

ed anche detto r il raggio della sfera

$$\text{spicchio} : \text{sfera} = \frac{1}{3} r. \text{fuso} : \frac{1}{3} r. \text{sup. sferica}$$

ma i conseguenti sono equivalenti (n. 659, Cor.), dunque anche gli antecedenti sono equivalenti, ossia

$$\text{spicchio} = \frac{1}{3} r. \text{fuso}$$

VOLUME DELLO SPICCHIO SFERICO. — *Il volume dello spicchio è dato dal terzo del prodotto dell'area del fuso base pel raggio; ossia*

$$\text{Vol. spicchio} = \frac{1}{3} r. \times \text{area fuso}$$

e sostituendo l'area del fuso (n. 646)

$$\text{Vol. spicchio} = \frac{1}{3} r \times 2ra = \frac{2}{3} r^2 a.$$

OSSERVAZIONE. Se dello spicchio si conosce la misura in gradi, e sia n° , si ha

$$\text{Vol. spicchio} = \frac{n}{360} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{n}{270} \pi r^3.$$

662. TEOREMA. *Il segmento sferico a due basi equivale ad una sfera, che ha per diametro l'altezza, aumentata della semisomma di due cilindri della stessa altezza del segmento ed aventi per basi le basi del segmento.*

Sia AA'B'B (fig. 278) il semisegmento circolare a due

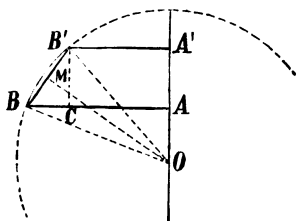


Fig. 278.

basi generatore del segmento sferico. Condotta la corda BB', il segmento sferico è la somma del solido generato dal trapezio AA'B'B, che è un tronco di cono, e del solido generato dal segmento circolare che ha per corda BB'. Questo alla sua volta si può considerare come la differenza tra il settore sferico generato dal set-

tore circolare OBB' ed il solido generato dal triangolo OBB'.

Ora (n. 660)

$$\text{Sett. sf. OBB'} = \frac{1}{3} \text{ zona } \widehat{BB'} \cdot OB = \frac{1}{3} \text{ circ. } OB \cdot AA' \cdot OB$$

ed anche (n. 380)

$$\text{Sett. sf. OBB'} = \frac{2}{3} \text{ cerchio } OB \cdot AA'$$

Condotta dal centro O la perpendicolare OM alla corda BB' si ha (n. 657)

$$\text{Sol. } \Delta \text{ OBB'} = \frac{1}{3} \text{ sup. } BB' \cdot OM = \frac{1}{3} \text{ circ. } OM \cdot AA' \cdot OM$$

ed anche (n. 380)

$$\text{Sol. } \Delta \text{ OBB'} = \frac{2}{3} \text{ cerchio } OM \cdot AA'$$

perciò eseguendo la differenza

$$\text{Sol. segm. circ. BB'} = \frac{2}{3} (\text{cerc. } OB - \text{cerc. } OM) \cdot AA'$$

e poichè

$$OB^2 - OM^2 = BM^2 = \frac{1}{4} BB'^2$$

così (n. 379)

$$\text{cerc. OB} - \text{cerc. OM} = \frac{1}{4} \text{ cerc. BB'}$$

perciò sostituendo

$$\text{Sol. segm. circ. BB'} = \frac{1}{6} \text{ cerc. BB'.AA'}$$

Aggiungasi ora il tronco di cono generato dal trapezio AA'B'B: perciò si osservi che, se si indica con K il segmento medio proporzionale tra AB ed $A'B'$, si ha (n. 655).

$$\text{Tronc. con. AA'B'B} = \frac{1}{3} (\text{cerc. AB} + \text{cerc. A'B} + \text{cerc. K}).AA'$$

ed addizionando

$$\text{Segm. sfer.} = \frac{1}{6} (\text{cerc. BB'} + 2 \text{ cerc. AB} + 2 \text{ cerc. A'B'} + 2 \text{ cerc. K}).AA'$$

Conducasi $B'C$ perpendicolare ad AB : dal triangolo $BB'C$ si ha

$$BB'^2 = B'C^2 + BC^2 = AA'^2 + (AB - A'B')^2$$

ma

$$(AB - A'B')^2 = AB^2 + A'B'^2 - 2AB.A'B'$$

ed anche, per essere $AB, A'B' = K^2$.

$$(AB - A'B')^2 = AB^2 + A'B'^2 - 2K^2$$

perciò sostituendo

$$BB'^2 = AA'^2 + AB^2 + A'B'^2 - 2K^2$$

e per conseguenza (n. 379)

$\text{cerc. BB'} = \text{cerc. AA'} + \text{cerc. AB} + \text{cerc. A'B'} - 2 \text{ cerc. K}$
e sostituendo nella relazione sopra trovata al cerc. BB' l'equivalente

$$\text{Segm. sfer.} = \frac{1}{6} (\text{cerc. AA'} + 3 \text{ cerc. AB} + 3 \text{ cerc. A'B'}).AA'$$

ed anche

$$\text{Segm. sfer.} = \frac{1}{3} \text{ cerc. AA'} \cdot \frac{1}{2} AA' + \frac{1}{2} (\text{cerc. AB} + \text{cerc. A'B'}).AA'$$

e poichè il cerc. AA' equivale alla superficie sferica di diametro AA' (n. 644. Oss.), si deduce che la prima parte della

somma equivale alla sfera che ha per diametro l'altezza AA' e la seconda alla semisomma dei due cilindri di altezza AA' ed avente per basi le basi del segmento.

VOLUME DEL SEGMENTO SFERICO. — Se si indicano con r , r' i raggi delle basi e con h l'altezza, dal teorema precedente si ha

$$\text{Vol. segm. sfer.} = \frac{1}{6} \pi h^3 + \frac{1}{2} \pi h (r^2 + r'^2).$$

OSSERVAZIONE. Se il segmento è ad una base, allora $r' = 0$ e la formola diventa

$$\begin{aligned} \text{Vol. segm. sfer. ad una base} &= \frac{1}{6} \pi h^3 + \frac{1}{2} \pi r^2 h \\ &= \frac{1}{2} \pi h \left(\frac{1}{3} h^2 + r^2 \right). \end{aligned}$$

663. TEOREMA. *Due piramidi sferiche opposte sono equivalenti.*

Infatti le loro basi come poligoni opposti sono decomponibili nello stesso numero di parti eguali (n. 648), e perciò anche le piramidi stesse sono decomponibili nello stesso numero di piramidi triangolari eguali.

664. TEOREMA. *La piramide sferica equivale al cono di base equivalente e di altezza eguale al raggio.*

Infatti con ragionamento analogo a quello seguito pel triangolo sferico e considerando gli spicchi invece dei fusi si deduce che la piramide triangolare $OABC$ (fig. 251) equivale alla metà dello spicchio sferico corrispondente all'eccesso sferico $\widehat{E}$ della base, cioè:

$$OABC = \frac{1}{2} \text{ spicchio } \widehat{E}$$

ma (n. 661)

$$\text{spicchio } \widehat{E} = \frac{1}{3} r. \text{ fuso } \widehat{E}$$

e

$$\frac{1}{2} \text{ spicchio } \widehat{E} = \frac{1}{3} r. \frac{1}{2} \text{ fuso } \widehat{E}$$

di più (n. 649)

$$\frac{1}{2} \text{ fuso } \widehat{E} = ABC$$

perciò, sostituendo si ha infine:

$$OABC = \frac{1}{3} r. ABC$$

Il teorema poi si estende facilmente ad una piramide poligonale, decomponeandola in piramidi triangolari, analogamente a quanto si è fatto per il poligono sferico.

VOLUME DELLA PIRAMIDE SFERICA. — *Il volume della piramide sferica è dato dal terzo del prodotto dell'area della base per il raggio: ossia*

$$\text{Vol. pir. sf.} = \frac{1}{3} r \times \text{area base}$$

e ricordando che l'area della base è re (n. 651),

$$\text{Vol. pir. sf.} = \frac{1}{3} r^2 e$$

oppure, se l'eccesso sferico è dato in gradi e sia n°

$$\text{Vol. pir. sf.} = \frac{1}{3} r^2 \frac{\pi r n}{180} = \frac{n}{540} \pi r^3.$$

OSSERVAZIONE. Le superficie cilindrica e conica ed il cilindro sono grandezze della terza specie. Invece il cono ed il tronco di cono, la superficie sferica e le sue parti, la sfera e le sue parti ci porgono esempi di una specie di grandezze diversa dalle tre specie finora considerate. Esse infatti sono limiti di serie convergenti costituite da grandezze della terza specie: tali cioè che alla loro volta sono limiti di serie convergenti di grandezze di prima o di seconda specie. Per questa nuova specie di grandezze però non è difficile verificare che valgono le stesse cose che si sono dette per quelle della terza specie per quanto riguarda i concetti di equivalenza, di somma e di differenza al n. 269 e seguenti.

CAPITOLO VI.

FIGURE SIMILI

§ 1.º Poliedri simili. — Rapporto dei poliedri e delle loro superficie.

665. TEOREMA. *Un fascio di piani paralleli determina su due trasversali due serie di segmenti proporzionali.*

I piani paralleli P, Q, R, S.... (fig. 279) incontrino due trasversali nelle due serie di punti A, B, C, D... e A', B', C', D'.... Si conduca da A la parallela alla A'B', la quale incontra i piani Q, R, S.... nei punti F, G, H.... Le FB, GC, HD.... sono parallele, perciò

$$AB : BC : CD... = AF : FG : GH...$$

ma

$$AF = A'B', \quad FG = B'C', \quad GH = C'D'...$$

dunque

$$AB : BC : CD... = A'B' : B'C' : C'D'...$$

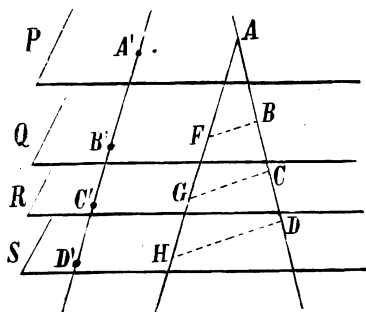


Fig. 279.

666. TEOREMA. *Due sezioni parallele fatte in un angoloide determinano col medesimo due piramidi, che hanno le facce simili e gli angoloidi eguali, ciascuno a ciascuno, e similmente disposti.*

Nell'angoloide V (fig. 230) sieno fatte le sezioni parallele $ABCDE$, $(ABCDE)'$. È chiaro che le due piramidi $VABCDE$, $V(ABCDE)'$ hanno le basi simili, le facce laterali VAB , $VA'B'$; VBC , $VB'C'$..., rispettivamente simili: l'angoloide in V comune, e gli angoloidi in A ed in A' , in B ed in B' ... eguali e similmente disposti.

Due piramidi come le $VABCDE$, $V(ABCDE)'$ si dicono *simili*.

667. TEOREMA. *Due tetraedri che hanno un diedro eguale compreso tra facce simili e similmente poste sono simili.*

I due tetraedri $ABCD$, $(ABCD)'$ (fig. 280) abbiano

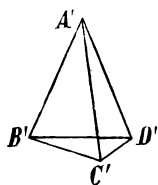
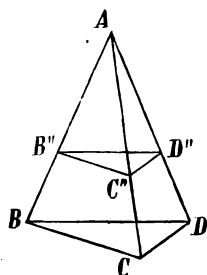


Fig. 280.

$\overline{AB} = \overline{A'B'}$ e le facce ABC , ABD dell'uno simili e similmente poste alle facce $(ABC)'$, $(ABD)'$ dell'altro. Sullo spigolo AB si prenda $AB'' = A'B''$ e si faccia la sezione $(BCD)''$ paral-

lela alla BCD : è chiaro allora che i triangoli $AB''C''$, $AB''D''$ sono eguali ai triangoli $A'B''C''$, $A'B''D''$, (n. 319), perciò i tetraedri $A''B''D''$, $(ABCD)'$, avendo un diedro eguale compreso tra facce eguali e similmente poste, sono eguali (n. 503). Ma il primo è simile ad $ABCD$, dunque anche $(ABCD)'$ è simile ad $ABCD$.

668. TEOREMA. *Due tetraedri cogli spigoli dell'uno*

ordinatamente nella stessa direzione degli spigoli dell'altro sono simili.

Infatti le facce sono simili (n. 319, Cor.) e gli angoloidi corrispondenti eguali (n. 487).

669. PROBLEMA. *Dato un tetraedro ABCD (fig. 280) ed un segmento A'B', come omologo dello spigolo AB, costruire un tetraedro simile al dato.*

Si costruisca un diedro eguale ad $\overline{AB}$ (n. 422) collo spigolo A'B', e nelle due facce del diedro si costruiscano i triangoli A'B'C', A'B'D' simili e similmente posti ai triangoli ABC, ABD: condotto C'D', il tetraedro A'B'C'D' è il cercato.

670. Sia dato ora un poliedro ABCDEF (fig. 281); si decompongano le sue facce in triangoli con opportune diagonali (ove occorra), e si unisca un punto interno O coi vertici.

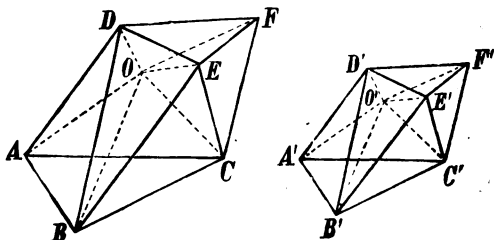


Fig. 281.

Il poliedro verrà così decomposto in tanti tetraedri quanti sono i triangoli costituenti le sue facce. Ora da un punto O' si conducano dei raggi nella stessa direzione rispettivamente dei raggi OA OB... OF e si prendano su di essi dei segmenti O'A', O'B'... O'F' proporzionali ai primi. I punti A', B'... F' sono vertici di un poliedro, che ha col primo le facce simili e similmente poste e gli angoloidi ordinatamente eguali.

Infatti le coppie di tetraedri OABC, (OABC)';

OABD, (OABD)'... sono simili per avere i triedri in O ed in O' eguali e compresi da facce simili, perciò i triangoli costituenti le superficie dei due poliedri sono simili e similmente posti; di più se due triangoli come ABD, BED formano una faccia ABED, i triangoli (ABD)', (BED)' sono anzitutto in un piano, perchè il diedro $\overline{B'D'}$ è piatto come il suo eguale $\overline{BD}$, e formano una faccia (ABED)', che è simile (n. 327) alla prima. Infine i diedri compresi da facce simili sono eguali, perchè somme di diedri eguali, perciò anche gli angoloidi compresi da facce simili sono eguali.

Due poliedri come quelli ora considerati, si dicono *simili*.

671. Quanto precede dimostra che:

TEOREMA. *Due poliedri formati da tetraedri simili e similmente posti sono simili.*

E risolve ancora il seguente

672. PROBLEMA. *Dato un poliedro ABCDEF ed un segmento m, costruire un poliedro simile al dato e collo spigolo omologo ad AB eguale ad m.*

Infatti nella costruzione indicata al n. 670 basterà prendere O'A' in modo che

$$AB : m = OA : O'A'$$

ed è chiaro allora che lo spigolo A'B' omologo di AB sarà eguale ad m.

673. Reciprocamente

TEOREMA. *Due poliedri simili sono decomponibili in tetraedri simili e similmente posti.*

Sieno i poliedri simili ABCDEF, (ABCDEF)' (fig. 281) che dico per brevità P e P'. Si decomponga il primo, come al n. 670, nei tetraedri OABC, OABD... e nel secondo si costruisca il tetraedro O'A'B'C'

simile e similmente posto al tetraedro OABC (n. 669); unendo il punto O' coi rimanenti vertici del poliedro P', questo viene decomposto nello stesso numero di tetraedri simili e similmente posti a quelli del poliedro P. Infatti i tetraedri OABD, (OABD)' sono simili per avere i diedri OABD, (OABD)' eguali (come differenze di diedri eguali) e compresi tra facce simili e similmente poste (n. 667). Lo stesso dicasi di ogni altra coppia di tetraedri successivamente.

674. TEOREMA. *Due poliedri, simili ad un terzo, sono simili tra loro.*

675. TEOREMA. *Le superficie di due poliedri simili stanno come i quadrati di due spigoli omologhi.*

Infatti sieno $s_1, s_2, s_3 \dots$ le facce di un poliedro e $s'_1, s'_2, s'_3 \dots$ le corrispondenti di un altro simile al primo, le quali per avere a due a due uno spigolo comune sono proporzionali; perciò si avrà

$$\frac{s_1}{s'_1} = \frac{s_2}{s'_2} = \frac{s_3}{s'_3} \dots$$

da cui

$$\frac{s'_1 + s'_2 + s'_3 + \dots}{s_1 + s_2 + s_3 + \dots} = \frac{s_1}{s'_1}$$

ora se a, a' sono due lati omologhi delle facce s_1, s'_1 si ha

$$\frac{s_1}{s'_1} = \frac{a^2}{a'^2},$$

dunque

$$\frac{s_1 + s_2 + s_3 + \dots}{s'_1 + s'_2 + s'_3 + \dots} = \frac{a^2}{a'^2}.$$

COROLLARIO. *Il rapporto delle superficie è il quadrato del rapporto di similitudine.*

676. TEOREMA. *Due tetraedri con un triedro eguale stanno come i parallelepipedi degli spigoli dell' uno e degli spigoli dell' altro che determinano i triedri eguali.*

Si sovrappongano i due tetraedri in modo da far coincidere i triedri eguali, e sieno i due tetraedri $SABC$, $SA'B'C'$ (fig. 282) coi triedri in S coincidenti. Si unisca C con A' e con B' .

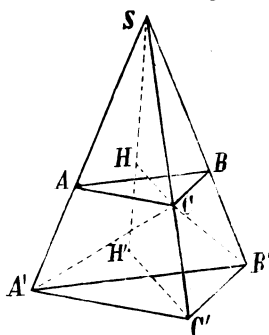


Fig. 282.

Intanto (n. 277, 1.º) si ha

$$\frac{SABC}{SA'B'C'} = \frac{CABS}{CA'B'S} \times \frac{CABS}{C'A'B'S}$$

Ora i tetraedri $CABS$, $CA'B'S$ avendo la medesima altezza rispetto a C stanno come le basi (n. 632, Cor.), cioè

$$\frac{CABS}{CA'B'S} = \frac{ABS}{A'B'S}$$

e poichè (n. 347)

$$\frac{ABS}{A'B'S} = \frac{AS}{A'S} \times \frac{BS}{B'S}$$

si deduce

$$\frac{CABS}{CA'B'S} = \frac{AS}{A'S} \times \frac{BS}{B'S}$$

I tetraedri $CA'B'S$, $C'A'B'S$ avendo la stessa base $A'B'S$ stanno come le corrispondenti altezze CH , $C'H'$ (n. 631, Cor.), cioè

$$\frac{CA'B'S}{C'A'B'S} = \frac{CH}{C'H'}$$

ma dai triangoli SCH , $SC'H'$ simili

$$\frac{CS}{C'S} = \frac{CH}{C'H}$$

perciò

$$\frac{CA'B'S}{C'A'B'S} = \frac{CS}{C'S}$$

Facendo ora nella prima relazione le opportune sostituzioni si ha

$$\frac{SABC}{SA'B'C'} = \frac{AS}{A'S} \times \frac{BS}{B'S} \times \frac{CS}{C'S}$$

ed anche (n. 633)

$$\frac{SABC}{SA'B'C'} = \frac{AS. BS. CS}{A'S. B'S. C'S}$$

COROLLARIO. *Due tetraedri simili stanno come i cubi degli spigoli omologhi.*

Infatti se i tetraedri $SABC$, $SA'B'C'$ sono simili si ha

$$\frac{AS}{A'S} = \frac{BS}{B'S} = \frac{CS}{C'S}$$

perciò la relazione precedente diventa

$$\frac{SABC}{SA'B'C'} = \left(\frac{AS}{A'S} \right)^3$$

ed anche (n. 633 Coroll.)

$$\frac{SABC}{SA'B'C'} = \frac{AS^3}{A'S^3}$$

677. TEOREMA. *Due poliedri simili stanno come i cubi di due spigoli omologhi.*

Infatti sieno $t_1, t_2, t_3 \dots$ e t'_1, t'_2, t'_3 i tetraedri simili in cui sono decomponibili i poliedri dati; questi per avere a due a due degli spigoli in comune sono proporzionali, perciò

$$\frac{t_1}{t'_1} = \frac{t_2}{t'_2} = \frac{t_3}{t'_3} = \dots$$

da cui

$$\frac{t_1 + t_2 + t_3 + \dots}{t'_1 + t'_2 + t'_3 + \dots} = \frac{t_1}{t'_1}$$

ora se a, a' sono due spigoli omologhi dei tetraedri t_1, t'_1 si ha

$$\frac{t_1}{t'_1} = \frac{a^3}{a'^3},$$

dunque

$$\frac{t_1 + t_2 + t_3 + \dots}{t'_1 + t'_2 + t'_3 + \dots} = \frac{a^3}{a'^3}$$

COROLLARIO. *Il rapporto dei poliedri simili è il cubo del rapporto di similitudine.*

§ 2.° Figure simili e simili-opposte.

678. Sieno $ABCD, (ABCD)'$ (fig. 283) due tetraedri simili; si costruisca sopra $A'B'C'$ il tetraedro $A'B'C'D''$ eguale-opposto al tetraedro $(ABCD)'$ (n. 517). Perciò anche le facce dei tetraedri $ABCD, A'B'C'D''$

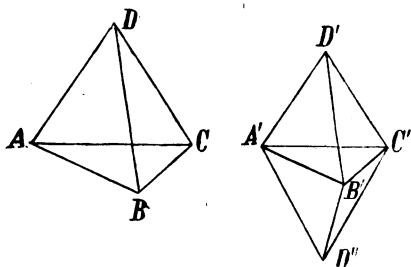


Fig. 283.

sono simili ed i diedri compresi da facce simili sono eguali, ma gli angoloidi compresi da facce simili sono l'uno eguale all'opposto dell'altro.

679. Per distinguere i due casi, mentre si dice che i tetraedri $ABCD, (ABCD)'$ sono simili, diremo che i tetraedri $ABCD, A'B'C'D''$ sono *simili-opposti*.

La stessa distinzione può farsi per due piramidi

poligonali, per due prismi ed anche per due poliedri qualunque.

Vi sono dei poliedri che se sono simili, sono anche simili-opposti, come due piramidi rette o due prismi retti a base regolare, due parallelepipedi rettangoli, due poliedri regolari ecc.

680. Passando ora al concetto generale di figure simili si dirà che: *due figure sono simili (o simili-opposte) se a ciascun punto dell'una figura corrisponde uno ed un sol punto dell'altra in modo che quattro punti dell'una figura e i quattro corrispondenti dell'altra sieno vertici di tetraedri simili (o simili-opposti). E se quattro punti di una figura sono in un piano, anche i quattro corrispondenti sono in un piano, e le quattro coppie di punti sono vertici di due quadrilateri simili.*

Questa definizione è giustificata dal seguente:

TEOREMA. *Dati due triangoli simili ABC, A'B'C' (fig. 284) se ai punti D, E, F, G..., che si considerano*

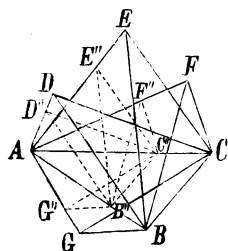


Fig. 284.

facenti parte di una figura con ABC, corrispondono i punti D', E', F', G'..., che si considerano facenti parte di un'altra figura con

A'B'C', in modo che le coppie di tetraedri ABCD, (ABCD)'; ABCE, (ABCE).... sieno simili e similmente posti, anche due tetraedri che hanno per vertici quattro coppie di punti corrispondenti sono simili.

E le due figure sono simili.

E se le coppie anzidette di tetraedri sono simili-opposte, anche due tetraedri, che hanno per vertici quattro coppie di punti corrispondenti sono simili-opposti.

E le due figure sono *simili-opposte*.

Infatti se si sovrappone la seconda figura alla prima in modo che il punto A' cada in A, il punto B' sopra AB in B'' ed il piano A'B'C' sul piano ABC, anche C' cadrà su AC in C'' in modo che C''B'' sarà parallelo (e nella stessa direzione) di CB. Di più per la somiglianza dei tetraedri ABCD, (ABCD)'; ABCE, (ABCE)'... i punti D', E',... dovranno cadere rispettivamente sopra AD, AE,... in D'', E''..., ed in modo che

$$AD : AD'' = AE : AE'' = \dots = AB : AB''$$

Perciò i segmenti D''E'', D''F''.... saranno paralleli (e nella stessa direzione) ai segmenti DE, DF.... che uniscono i punti D, E, F.... corrispondenti ai primi, ed i triangoli DEF, (DEF)''; DEG, (DEG)''... saranno simili e similmente posti. Laonde i tetraedri DEFG, (DEFG)''.... cioè i tetraedri che hanno per vertici quattro coppie di punti corrispondenti, sono simili (n. 668): ed infine anche i tetraedri DEFG, (DEFG)'.... sono simili.

È chiaro poi che se quattro punti della seconda figura sono in un piano, anche i corrispondenti della prima sono in un piano che risulta parallelo all'altra, e i due quadrilateri che hanno per vertici le quattro coppie di punti sono simili.

Se le coppie di tetraedri dati sono simili-opposte, si costruisca la figura eguale-opposta alla seconda (n. 523) e questa sarà simile alla prima.

I punti A', B', C', D'.... si dicono *omologhi* ai

punti A, B, C, D....; così sono omologhi due segmenti che uniscono due punti omologhi, ecc.

Fra le principali conseguenze che si possono dedurre noteremo le seguenti:

1.° *I segmenti omologhi hanno un rapporto costante che dicesi il rapporto di similitudine delle due figure.*

2.° *Se una figura ha il centro, anche l'altra ha il centro che è omologo del primo.*

3.° *Due coni rotondi e due cilindri rotondi sono simili, se i raggi delle basi sono proporzionali ai lati o alle altezze: in questo caso sono anche simili-opposti.*

Due sfere sono simili e simili-opposte.

Due solidi di rotazione in generale sono simili, se sono simili le sezioni meridiane.

4.° *Due figure F_1 , F_2 simili o simili-opposte ad una terza F_3 sono simili fra loro. Se invece una delle prime due è simile ad F_3 e l'altra simile opposta ad F_3 , le prime due sono simili-opposte (n. 674).*

Grazie a questo teorema poi la questione:

Costruire una figura simile ad una data ABCDE... (fig. 284) sopra un segmento A'B' come omologo di AB, è ridotta a costruire con A'B', come omologo di AB, una serie di tetraedri simili e similmente posti ai tetraedri ABCD, ABCE.... (n. 669).

Faremo da ultimo osservare che i teoremi 675 e 677 valgono per due figure simili e simili-opposte qualunque. In particolare poi:

TEOREMA. *Le superficie di due coni o di due cilindri simili stanno come i quadrati dei raggi delle basi, i quadrati delle altezze ecc.,*

le superficie sferiche come i quadrati dei raggi.

TEOREMA. *I coni, i cilindri simili stanno come i cubi dei raggi delle basi, i cubi delle altezze ecc..., le sfere come i cubi dei raggi.*

§ 3.º Figure omotetiche.

681. Le definizioni sulle figure omotetiche nel piano e quanto è detto ai n. 354-355 valgono anche nello spazio.

682. 1.º **TEOREMA.** *Due figure (solide) omotetiche direttamente sono simili; se inversamente sono simili-opposte. — Le figure piane omotetiche sono simili e situate in piani paralleli.*

Infatti se due figure sono omotetiche, il rapporto di due segmenti omologhi è eguale al rapporto di omotetia, di più se omotetiche direttamente come $ABCD.... A'B'C'D'$ (fig. 285) i segmenti omologhi, come $AB, A'B'$ sono nella stessa direzione; se inversamente, come $ABCD...., A''B''C''D''$, i segmenti omologhi, come $AB, A''B''$ sono in direzione opposta; perciò le figure piane come $ABC, A'B'C'$, ed anche $ABC, A''B''C''$ sono simili ed in piani paralleli; mentre i triedri aventi per spigoli segmenti omologhi nel primo caso sono eguali, nel secondo eguali-opposti. Dunque le figure solide sono simili nel primo caso, simili-opposte nel secondo.

OSSERVAZIONE. *Le sezioni fatte in un angoloide (e nel suo opposto) o in una superficie conica con piani paralleli sono omotetiche rispetto al vertice.*

Reciprocamente:

2.º **TEOREMA.** *Due figure solide simili (simili-opposte) e coi segmenti omologhi nella stessa direzione (in direzioni opposte) sono omotetiche direttamente (inversamente); due figure piane simili e coi segmenti omologhi nella stessa*

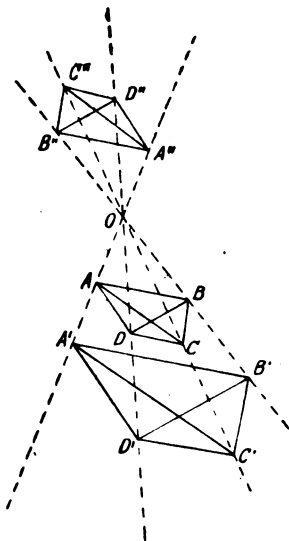


Fig. 285.

direzione (in direzione opposta) sono omotetiche direttamente (inversamente).

Si dimostra come il correlativo al n. 356, 2.º della Planimetria.

COROLLARIO. *Due figure piane simili e coi segmenti omologhi nella stessa direzione (in direzioni opposte) sono sezioni parallele di un angoloide, o di una superficie conica (di un angoloide e del suo opposto; o delle due falde di una superficie conica).*

683. TEOREMA. *Se due figure sono omotetiche e l'una ha il centro, anche l'altra ha il centro, che è il punto omologo del primo. Di più le due figure sono omotetiche tanto direttamente che inversamente.*

Come il n. 359 Planimetria.

684. TEOREMA. *Due sfere sono omotetiche tanto direttamente che inversamente.*

Come il n. 360 Planimetria.

685. TEOREMA. *Due figure omotetiche ad una terza sono omotetiche tra loro. I tre centri d'omotetia sono in una linea retta che dicesi asse di omotetia.*

Come il n. 361 Planimetria colle relative osservazioni.

OSSERVAZIONE. Quattro figure omotetiche a due a due presentano sei centri di omotetia, che essendo a tre a tre in linea retta danno luogo a quattro assi di omotetia: questi giacciono evidentemente in un piano, che dicesi *piano di omotetia*. I quattro assi possono essere d'omotetia diretta, ed allora il piano dicesi di *omotetia diretta*, oppure uno di omotetia diretta e tre di inversa, ed il piano dicesi di *omotetia mista*: e infine i quattro assi sono di omotetia inversa ed il piano dicesi di *omotetia inversa*.

Che se poi le quattro figure hanno anche il centro (nel qual caso ciascuna coppia di figure presenta entrambe le omotetie), si hanno dodici centri di omotetia, sedici assi di omotetia ed otto piani di omotetia.

Anche qui invitiamo lo studioso (come al n. 362) a fare le opportune modificazioni a quanto si è detto sulle figure omotetiche nel caso che tutte od alcune delle omotetie dirette considerate diventino *affini*.

ESERCIZI

PARTE PRIMA

ESERCIZI DI PLANIMETRIA

CAPITOLO I

1. Sia AB un segmento, C il suo punto di mezzo ed M un punto qualunque della retta AB . Il segmento MC è eguale alla semisomma o alla semidifferenza dei segmenti MA , MB , secondo che il punto M è esterno oppure interno al segmento AB .

2. Sieno AB , BC , CD ,... GH , HL n segmenti adiacenti ed eguali, O il punto di mezzo del segmento AL , ed M un punto della retta AL esterno al segmento AL . Il segmento $MO = \frac{1}{n+1} (MA + MB + \dots ML)$. Modificare il teorema per caso che il punto M cada sul segmento AL .

3. Sia $\widehat{AOB}$ un angolo, OC la sua bisettrice (si dice *bisettrice* di un angolo il raggio che lo divide in due parti eguali (n. 115)) ed OM un raggio qualunque che parte da O . L'angolo $\widehat{MOC}$ è eguale alla semisomma o alla semidifferenza degli angoli $\widehat{MOA}$, $\widehat{MOB}$, secondo che il raggio OM è esterno oppure interno all'angolo $\widehat{AOB}$.

Avvertenza — Gli esercizi proposti in un capitolo s'intende che devono essere risolti colle nozioni date in quel capitolo e nei precedenti.

I numeri fra parentesi posti in alcuni enunciati indicano le proposizioni del testo che devono servire principalmente per la dimostrazione del teorema (o soluzione del problema) proposto.

4. Due circonferenze che hanno lo stesso centro o coincidono o non hanno nessun punto comune.

5. Due circonferenze non possono dimezzarsi scambievolmente.

6. Enunciare e dimostrare le otto proposizioni (coi corollari) rappresentate dalle relazioni di cui al n. 71.

7. Enunciare e dimostrare le proposizioni rappresentate dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} A + (B + C + D) &= A + B + C + D \\ (A + B + C) + D &= (A + D) + B + C \\ A + (B - C) &= A + B - C \\ A - (B + C) &= A - B - C \\ A - (B - C) &= A + C - B \\ (A \pm C) - (B \pm C) &= A - B \end{aligned}$$

8. Le bisettrici degli angoli opposti al vertice sono in linea retta. Reciprocamente il prolungamento della bisettrice di un angolo è bisettrice dell'angolo opposto al vertice (n. 74).

9. Le bisettrici degli angoli adiacenti e supplementari sono perpendicolari fra loro. Reciprocamente se le bisettrici di due angoli adiacenti sono perpendicolari fra loro, gli angoli sono supplementari (n. 75 al 77).

10. Ammesso vero il reciproco del teorema n. 81 dimostrare il postulato n. 83.

11. Se due rette sono perpendicolari a due rette che si incontrano, anche le prime s'incontrano (n. 85 cor. e n. 76).

12. Le bisettrici degli angoli alterni e corrispondenti formati da due rette parallele con una secante sono parallele; quelle dei coniugati sono perpendicolari fra loro.

13. Le bisettrici degli angoli coi lati a due a due nella stessa direzione od in direzione opposta sono parallele; quelle degli angoli che hanno una coppia di lati nella stessa direzione e l'altra coppia in direzione opposta sono perpendicolari fra loro.

14. Gli angoli acuti (od ottusi) coi lati ordinatamente perpendicolari sono eguali; e se un angolo è acuto e l'altro ottuso sono supplementari. (Si suppongano prima col vertice comune e poi il caso generale si riduce a questo per mezzo del n. 86).

15. Ripetere per le striscie (n. 87) quanto è detto per i segmenti e per gli angoli ai § 1.º e 3.º.

CAPITOLO II

16. Qual è il poligono che ha tante diagonali quanti sono i lati? Vi può essere un poligono con una sola diagonale?

17. Dimostrare il teorema n. 98 per mezzo delle diagonali condotte da un vertice. Estenderlo al caso del poligono concavo non intrecciato.

18. Dimostrare il teor. n. 99 conducendo da un punto i raggi paralleli ai lati del poligono (n. 86).

19. Sia ABC un triangolo ed O un punto interno. Dimostrare che $\widehat{BOC} > \widehat{BAC}$.

20. In un triangolo isoscele la bisettrice dell'angolo esterno non adiacente alla base è parallela alla base, e reciprocamente.

21. Se in un triangolo isoscele un angolo è $\frac{2}{3} \widehat{R}$, il triangolo è equilatero.

22. Le bisettrici degli angoli esterni d'un triangolo (a lati diseguali) formano esternamente al primo altri tre triangoli cogli angoli rispettivamente eguali (n. 99 e 96 cor. 4.°).

23. Se due triangoli hanno i lati ordinatamente paralleli o perpendicolari, gli angoli dei triangoli sono rispettivamente eguali (n. 86 ed Eserc. 14).

24. In un triangolo la bisettrice di un angolo esterno forma col prolungamento del lato opposto (quando lo incontra) un angolo acuto eguale alla semidifferenza degli altri due angoli del triangolo (n. 95 e cor. 1.°).

25. In un triangolo l'angolo formato dalla bisettrice e dall'altezza ⁽¹⁾ che partono dello stesso vertice è eguale alla semidifferenza degli altri due angoli del triangolo (n. 96 e cor.).

26. L'angolo delle bisettrici di due angoli consecutivi di un quadrilatero è eguale alla semisomma degli altri due angoli del quadrilatero.

(1) Si dice *altezza* di un triangolo il segmento perpendicolare ad un lato condotto pel vertice opposto. Un triangolo ha tre altezze.

27. Le bisettrici degli angoli consecutivi d'un quadrilatero (incontrandosi) determinano un secondo quadrilatero, che ha gli angoli opposti supplementari. Lo stesso vale per le bisettrici degli angoli esterni.

28. Se si prolungano ad incontrarsi i lati opposti di un quadrilatero, le bisettrici dei due angoli così ottenuti si incontrano sotto un angolo eguale alla semisomma di due angoli opposti del quadrilatero.

29. In un triangolo isoscele una retta perpendicolare alla base incontra i lati eguali (prolungati) in due punti equidistanti del vertice.

30. Un angolo di un triangolo è acuto, retto od ottuso, secondo che la mediana ⁽¹⁾ che parte dal suo vertice è maggiore, eguale o minore della metà del lato opposto (n. 100, 2.º); e reciprocamente.

31. Dimostrare che in un triangolo il lato maggiore è minore della somma degli altri due per mezzo dell'altezza corrispondente (n. 101 cor.).

32. In un triangolo un lato è minore del semiperimetro.

33. Dimostrare direttamente che in un triangolo un lato è maggiore della differenza degli altri due, e dedurre che un lato è minore della somma degli altri due.

34. In un triangolo rettangolo ed isoscele il doppio dell'ipotenusa è minore del triplo del cateto. (Se BAC è il triangolo rettangolo in A, si prolunghi BA di $AD = \frac{1}{2} AB$; e si provi

che $BC < BD$, perchè $\widehat{BDC} < \widehat{BCD}$ o, sottraendo $\frac{1}{2} \widehat{R}$, $\widehat{ACD} < \widehat{EDC}$. (E è il punto medio di AC)).

35. In un triangolo rettangolo se un angolo acuto è doppio dell'altro, l'ipotenusa è doppia del cateto minore.

36. Sia ABC un triangolo, O un punto internò. Dimostrare che la somma $OA + OB + OC$ è compresa fra il perimetro ed il semiperimetro del triangolo.

37. In un quadrilatero la somma delle diagonali è compresa fra il perimetro ed il semiperimetro del quadrilatero.

(1) Si dice mediana di un triangolo il segmento che unisce un vertice col punto di mezzo del lato opposto. Un triangolo ha tre mediane. (Vedi pag. 73 nota).

38. In un poligono la somma delle congiungenti un punto interno coi vertici è maggiore del semiperimetro.

39. In un triangolo una mediana è minore della semisomma dei lati concorrenti con essa e maggiore della semidifferenza degli stessi lati. (Si prolunghi la mediana di altrettanto e si unisca l'estremo con un estremo del lato su cui cade, di poi n. 106 1.°, e 102).

40. In un triangolo la somma delle mediane è compresa fra il perimetro ed il semiperimetro del triangolo. (Es. prec.).

41. Da un punto O partano dei raggi ad incontrare una retta nei punti A, B, C,....: sui raggi opposti si prendano rispettivamente $OA' = OA$, $OB' = OB$, $OC' = OC$ I punti A', B', C' sono sopra una retta parallela alla AB.

42. Se i lati d'un triangolo equilatero si dividono in due parti in modo che le parti di un lato sieno ordinatamente eguali a quelle di un altro, i punti di divisione sono vertici di un triangolo equilatero.

43. In un triangolo isoscele le mediane, le altezze, le bisettrici corrispondenti ai lati eguali sono eguali.

44. Se sui lati di un triangolo ABC si costruiscono tre triangoli equilateri ABC' , BCA' , CAB' dimostrare che

$$AA' = BB' = CC'.$$

45. Due triangoli che hanno due lati ed una mediana eguali e similmente posti sono eguali. (Si distinguano due casi: nel caso che le mediane siano concorrenti coi lati eguali si faccia la costruzione indicata nell'eserc. 39).

46. Si dimostri il teor. 2.° del n. 106 unendo C'' con C (fig. 29) e provando che $\widehat{AC''C} > \widehat{ACC''}$, da cui ecc.

47. Due triangoli che hanno eguali rispettivamente un lato, l'altezza corrispondente ed un angolo adiacente a questo lato, sono eguali.

48. Due triangoli che hanno eguali rispettivamente gli angoli ed il perimetro, sono eguali. (I triangoli ABC, $A'B'C'$ abbiano eguali i perimetri, e di più sia $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{C'}$, $\widehat{C} = \widehat{B'}$. Sui prolungamenti di BC prendansi $BE = BA$, $CF = CA$; lo stesso si faccia per l'altro triangolo: i triangoli EAF, $E'A'F'$ sono eguali (n. 105) perchè $\widehat{E} = \frac{1}{2} \widehat{B}$ ecc., da cui ecc.).

49. Due triangoli, che hanno due angoli ed una altezza eguali e similmente posti, sono eguali.

50. Se in un triangolo un' altezza è mediana, oppure è bisettrice, quel triangolo è isoscele.

51. Condurre la perpendicolare ad un raggio nel suo estremo senza prolungarlo. (Sia A l'estremo del raggio; si prenda sul raggio un segmento AB e su questo si costruisca un triangolo equilatero ABC; si prolunghi CB di altrettanto in E; sarà EA la perpendicolare alla AB).

52. I punti medi dei lati di un rettangolo sono vertici di un rombo, ed i punti medi dei lati di un rombo sono vertici di un rettangolo.

53. In un pllgr. due rette condotte dal punto d'incontro delle diagonali incontrano il contorno del pllgr. in quattro punti che sono vertici di un nuovo pllgr.

54. Nel trapezio isoscele gli angoli adiacenti alle basi sono eguali; le diagonali sono eguali e si dividono in parti rispettivamente eguali.

55. Due trapezi coi lati ordinatamente eguali sono eguali. (Si costruisca in ciascun trapezio il triangolo che ha per lato la differenza delle basi e gli altri due lati del trapezio. Si dimostri l'eguaglianza di questi triangoli, da cui ecc....).

56. Due trapezi che hanno le basi e le diagonali ordinatamente eguali sono eguali. (Si costruisca in ciascun trapezio il triangolo che ha per lati la somma delle basi e le diagonali; questi triangoli sono eguali, da cui ecc....).

57. Se pel vertice A d'un pllgr. ABCD si conduce una retta qualunque, la distanza del vertice opposto C da questa retta è eguale alla somma o alla differenza delle distanze degli altri due vertici, secondo che la retta è esterna oppure interna all'angolo $\widehat{A}$ del pllgr.

58. Le bisettrici degli angoli di un pllgr. formano un rettangolo, le cui diagonali sono parallele ai lati del pllgr. ed eguali alla differenza dei lati stessi.

59. Le bisettrici degli angoli esterni d'un pllgr. formano un rettangolo, le cui diagonali sono parallele ai lati del parallelogrammo ed eguali alla somma dei lati stessi.

60. Sia ABCD un pllgr., E ed F i punti medi dei lati AD, BC. I segmenti BE, DF dividono la diagonale AC in tre parti eguali.

61. Date due parallele e due punti esterni alla loro striscia e da bande opposte, trovare la minima spezzata che unisce i due punti e tale che la parte compresa fra le due parallele abbia una direzione assegnata. (Si conduca da uno dei punti il segmento parallelo alla direzione data ed eguale al segmento compreso nella striscia: la congiungente l'estremo coll'altro punto viene divisa dalla parallela più vicina a questo in due parti eguali in grandezza e direzione ai due lati della spezzata richiesta esterni alla striscia).

62. Se da un punto del contorno di un rettangolo si conducono le parallele alle diagonali, queste colle diagonali stesse determinano un pllgr. di perimetro costante.

63. Di un pllgr. è dato il perimetro ed un angolo in grandezza e posizione. Dedurre dall'esercizio precedente il luogo del vertice opposto a quello dell'angolo dato.

64. La somma delle distanze che un punto del contorno di un rettangolo ha dalle sue diagonali è costante. La differenza delle distanze che un punto dei prolungamenti dei lati d'un rettangolo ha dalle diagonali è costante.

65. Dall'esercizio precedente dedurre qual'è il luogo dei punti dei quali la somma, o la differenza delle distanze da due rette concorrenti è eguale ad un segmento dato.

66. In un triangolo equilatero la somma delle distanze di un punto interno dai lati è costante. (Eserc. 64). Modificare il teorema pel caso del punto esterno.

67. Il quadrangolo che ha per vertici i punti medi dei lati d'un quadrangolo qualunque, è un pllgr.

68. In un trapezio il segmento che unisce i punti medi dei lati non paralleli è parallelo alle basi ed eguale alla loro semisomma: dimezza le diagonali, ed il segmento compreso fra queste è eguale alla semidifferenza delle basi.

69. Due triangoli che hanno le mediane rispettivamente eguali sono eguali. (Vedi nota a pag. 73 e l'eserc. 50).

70. Sia ABC un triangolo, AD una mediana dimezzata in M: si conduca BM ad incontrare in E il lato AC. Dimostrare che $CE = 2AE$.

71. In un triangolo i punti medi dei lati ed il piede di un'altezza sono vertici di un trapezio isoscele (n. 120 Cor.).

72. Se due figure F_1 , F_2 sono simmetriche di una terza F_3 , i segmenti che uniscono i punti corrispondenti delle

prime due sono eguali e nella stessa direzione, e doppi del segmento che unisce i due centri di simmetria.

73. Se due figure eguali hanno un asse di simmetria (cioè ciascuna è simmetrica di sè stessa rispetto ad una retta), sono eguali tanto direttamente che inversamente.

74. Se due figure F_1 , F_2 sono simmetriche di una terza F_3 rispetto a due rette concorrenti in O e che formano un angolo $\widehat{A}$, le figure F_1 , F_2 sono eguali direttamente. Facendo rotare una delle figure intorno ad O dell'angolo $\widehat{2A}$ (o $\widehat{4R} - \widehat{2A}$) si riduce a coincidere coll'altra: facendola rotare dell'angolo $\widehat{2R} - \widehat{2A}$ (o $\widehat{2A} - \widehat{2R}$) si riduce simmetrica all'altra rispetto ad O . In particolare se gli assi di simmetria sono perpendicolari tra loro, le due figure sono simmetriche rispetto ad O .

75. Data una retta e due punti dalla stessa banda, delle spezzate che uniscono i due punti e che hanno un vertice sulla retta trovare la minima. (Si unisca un punto col simmetrico dell'altro rispetto alla retta).

76. Dato un rettangolo e due punti in esso, delle spezzate che uniscono i due punti e che hanno un vertice sopra un lato, o due vertici sopra due lati, o tre vertici sopra tre lati ecc., trovare la minima. (Giuoco del bigliardo: vedasi eserc. precedente).

CAPITOLO III

77. Se un segmento si muove parallelamente a sè stesso in modo che un suo estremo percorra una circonferenza, qual'è il luogo descritto dall'altro estremo?

78. Sia O un cerchio e P un punto interno ad esso: sieno AA' , BB' ... delle corde passanti per P . Determinare il luogo dei punti medi dei segmenti determinati da P sulle corde. (Si congiunga O con P e con un estremo A di una corda; il segmento che dal punto medio M di OP va al punto medio di PA è eguale alla metà di OA (n. 132 cor.), perciò non varia come non varia la posizione di M , da cui....)

79. In un cerchio le congiungenti gli estremi di due corde parallele si tagliano sul diametro perpendicolare a queste corde.

80. Se due corde (che non siano diametri) si tagliano, non possono dimezzarsi scambievolmente.

81. Se due corde eguali si tagliano, le parti in cui si dividono sono rispettivamente eguali.

82. Due corde condotte per le estremità di un diametro e che formano con questo angoli alterni eguali, sono eguali. I loro punti di mezzo ed il centro sono in linea retta.

83. Se una retta incontra due circonferenze concentriche le parti intercette fra le due circonferenze sono eguali.

84. I raggi che dividono una corda in tre parti eguali, dividono l'arco corrispondente in tre parti, di cui le estreme sono eguali, e quella di mezzo è maggiore di ciascuna delle altre due.

85. Data una circonferenza ed un punto interno od esterno (escluso il centro), dei segmenti condotti da questo punto e terminata alla circonferenza

1.° i due normali (cioè quelli situati sulla retta che passa pel centro) sono l'uno il minimo e l'altro il massimo; questo contiene il centro.

2.° due segmenti sono eguali, se i loro estremi sono equidistanti dall'estremo di uno dei normali.

3.° due segmenti sono diseguali, se i loro estremi non sono equidistanti dall'estremo di un normale, e precisamente è maggiore quello il cui estremo ha maggior distanza dall'estremo del minimo (o minor distanza dall'estremo del massimo).

86. Si enunci e si dimostri il reciproco del teorema precedente.

87. Si discutano le posizioni relative di due circonferenze approfittando dei due teoremi precedenti.

88. Se due circonferenze si incontrano, delle seganti condotte per uno dei punti d'intersezione qual'è quella di cui la parte compresa fra le due circonferenze è la massima?

89. Se ABC è un triangolo equilatero iscritto in un cerchio ed M un punto dell'arco $\widehat{BC}$, dimostrare che $MA = BM + MC$.

90. L'angolo di due rette che s'incontrano dentro o fuori di un cerchio è eguale rispettivamente alla semisomma o alla semidifferenza degli angoli al centro che insistono sugli archi compresi fra i lati dell'angolo (ed i loro prolun-

gamenti). (Per uno dei punti d'intersezione di una retta colla circonferenza si conduca la parallela all'altra, di poi vedasi n. 149 e n. 139).

91. Se due triangoli iscritti nello stesso cerchio sono tali che i lati del primo fanno ordinatamente angoli eguali con quelli del secondo, i due triangoli sono eguali. Reciprocamente se due triangoli eguali sono iscritti nello stesso cerchio, i lati dell'uno formano ordinatamente angoli eguali con quelli dell'altro (eserc. 90).

92. Se due circonferenze s'intersecano e da uno dei punti comuni si conducono i due diametri, gli altri due estremi di questi diametri sono in linea retta coll'altro punto comune alle due circonferenze.

93. In un triangolo i punti simmetrici del punto d'incontro delle altezze (ortocentro) rispetto ai lati sono sulla circonferenza circoscritta al triangolo.

94. Sia ABC un triangolo, M un punto della circonferenza circoscritta, P, Q, R i simmetrici di M rispetto ai lati BC, CA, AB. Dimostrare che P, Q, R sono in linea retta (si osservi che C è il centro della circonferenza PMQ, perciò $\widehat{MPQ} = \frac{1}{2} \widehat{MCQ} = \widehat{MCA}$; similmente $\widehat{MPR} = \frac{1}{2} \widehat{MBR} = \widehat{MBA}$ ecc.).

95. In un triangolo si dicono coniugate isogonali due rette condotte per un vertice e che formano angoli eguali colla bisettrice. Ciò posto, in un triangolo le coniugate isogonali delle altezze concorrono nel centro del circolo circoscritto al triangolo. (Vedasi n. 170 pel circolo circoscritto al triangolo).

96. Luogo dei punti medi delle corde di una circonferenza che passano per un punto fisso. *3 casi*

97. Luogo dei piedi delle perpendicolari calate da un punto sulle rette di un fascio (rette che passano per uno stesso punto).

98. Luogo dei centri dei circoli di dato raggio che sono tangenti ad una circonferenza data, o che intercettano sulla stessa archi eguali.

99. Luogo dei punti tali che le coppie di tangenti condotte da ciascuno di essi ad una data circonferenza formino angoli eguali.

100. Se di un triangolo è dato un lato e l'angolo opposto, trovare i luoghi dei punti medi degli altri due lati.

101. Costruire la bisettrice di un angolo senza far uso del vertice.

102. Da un punto condurre una retta che disti egualmente da due punti dati.

103. Per un punto interno ad un angolo condurre una retta in modo che la parte compresa nell'angolo sia dimezzata in quel punto.

104. Sia ABC un triangolo: condurre una parallela DE al lato BC in modo che la somma dei segmenti BD, CE intercetti sui lati dell'angolo $\widehat{A}$ sia eguale a DE. (Si decomponga DE in due parti $DF = BD$ e $FE = EC$, si unisca F con B e con C ecc.)

105. Costruire un triangolo dati:

1.° due angoli ed un'altezza.

2.° due angoli e la somma di due lati.

3.° due angoli ed il perimetro (Eserc. 48).

4.° due lati ed un'altezza.

5.° due lati ed una mediana (Eserc. 45).

6.° un lato e due mediane.

7.° le tre mediane (Eserc. 69).

8.° un lato, l'angolo opposto e la somma o la differenza degli altri due lati.

9.° un lato l'angolo opposto ed una mediana, e considerare i diversi casi.

106. Costruire un pllgr. date le diagonali e il loro angolo.

107. Costruire un pllgr. dati i lati e l'angolo delle diagonali. (Sia ABCD il pllgr.: si prolunghi BC in E in modo che $EC = CB$: del triangolo BDE si conosce un lato BE, l'angolo opposto ed una mediana (Eserc. 105, 9.°, da cui ecc.).

108. Costruire un quadrato:

1.° data la diagonale;

2.° data la somma o la differenza della diagonale e del lato.

109. Costruire un trapezio date le diagonali, il loro angolo ed una base. (Si costruisca il triangolo colle due diagonali e il loro angolo come angolo compreso, da cui ecc.)

110. Costruire un quadrilatero date le diagonali, il loro

angolo e due lati opposti. (Sia ABCD il quadrilatero ed AB, CD i lati opposti dati. Si conduca BE eguale e parallela ad AC: il triangolo DBE è determinato dai due lati DB, BE e dall'angolo compreso: condotto DE, il triangolo DCE è determinato dai tre lati, da cui ecc.).

111. Costruire un quadrilatero, dati i quattro lati ed il segmento che unisce i punti medi di due lati opposti. (Sia ABCD il quadrilatero, EF il segmento che unisce i punti medi dei lati AB, CD. Si conducano da E i segmenti ED' ed EC' eguali e paralleli ad AD e BC. Del triangolo ED'C' si conoscono due lati ED', EC' e la mediana EF e si sa costruire (es. 105. 5°): sui lati D'F, E'F da bande opposte si costruiscano i triangoli DD'F, CC'F eguali e di cui si conoscono i tre lati, da cui ecc.).

112. Da un punto dato condurre una secante ad una circonferenza data in modo che la corda intercetta sia eguale ad un segmento dato (n. 140, 2.° Cor., e n. 162).

113. Condurre una tangente comune a due circonferenze.

114. Date due circonferenze, condurre una secante in modo che le parti intercette sieno eguali a due segmenti dati, (esercizio precedente e n. 140 cor.).

115. Determinare un punto dal quale si vedano due segmenti dati sotto due angoli dati (n. 164).

116. Descrivere una circonferenza

1.° che passi per un punto dato e tocchi una retta od una circonferenza data in un punto dato.

2.° che abbia un raggio dato e tocchi o due rette, o una retta ed una circonferenza, o due circonferenze date.

3.° che passi per due punti ed abbia un raggio dato, oppure il centro sopra una linea data.

117. L'angolo di due tangenti è doppio dell'angolo che la corda di contatto fa col diametro di uno degli estremi della corda.

118. In un triangolo rettangolo il raggio del cerchio iscritto è eguale alla semidifferenza tra la somma dei cateti e l'ipotenusa, e il raggio del cerchio ex-iscritto tangente alla ipotenusa è eguale al semiperimetro del triangolo.

119. Sia ABC un triangolo, D ed E i punti di contatto di AB colle circonferenze iscritta ed ex-iscritte tangente al lato BC. Dimostrare che AE è eguale al semiperimetro del

triangolo ed AD al semiperimetro diminuito dal lato BC. Analogamente per gli altri lati.

120. Le altezze d'un triangolo concorrono in un punto (detto ortocentro).

121. Le altezze d'un triangolo acutangolo sono le bisettrici degli angoli del triangolo che ha per vertici i piedi delle altezze. (Si considerino i quadrilateri che hanno per vertici l'ortocentro, i piedi di due altezze ed un vertice del triangolo; essi sono iscrivibili, perciò ecc.). Modificare il teorema pel caso del triangolo ottusangolo.

122. Dei triangoli iscritti in un triangolo dato (cioè coi vertici sui lati di questo) quello che ha per vertici i piedi delle altezze ha il perimetro minimo (es. preced. e simmetria rispetto ad una retta).

123. In un triangolo l'ortocentro ed i tre vertici sono i centri delle circonferenze tangenti ai lati del triangolo che ha vertici i piedi delle altezze. Distinguere secondo che il triangolo è acutangolo od ottusangolo.

124. Dal centro di una circonferenza si conduca la perpendicolare ad una retta, dal piede di questa una secante alla circonferenza e dai punti di intersezione le tangenti. Queste incontrano la retta data in due punti equidistanti dal piede della perpendicolare.

125. Date due circonferenze esterne l'una altra, dal centro di ciascuna si conducano le tangenti all'altra. Dimostrare che gli otto punti d'intersezione di ciascuna di queste rette colla circonferenza a cui non è tangente sono sopra due rette parallele alla retta dei centri.

126. In un quadrilatero si può inscrivere una circonferenza, se la somma di due lati opposti è eguale alla somma degli altri due (Teor. 173, 2°). (Sia ABCD il quadrilatero di cui due lati AD, BC non sieno paralleli. Si conducano le bisettrici degli angoli in A ed in B, e sia O il punto d'incontro: condotte le distanze OE, OG dai lati AD, BC si verifica facilmente che dev'essere $CD = DE + CG$. Si conducano le bisettrici degli angoli in D ed in C, e sia O' il punto d'incontro. Si dimostra facilmente che se O' non coincide con O non può essere $CD = DE + CG$).

127. Sia ABC un triangolo, O il centro del cerchio iscritto O' quello del cerchio ex-isritto tangente a BC. Si conducano

da O e da O' le parallele a BC ad incontrare i lati AB, AC la prima in D, E rispettivamente, la seconda in D', E'. Dimostrare che nel quadrilatero DEE'D si può iscrivere una circonferenza.

128. Se da un punto della circonferenza circoscritta ad un triangolo si conducono le perpendicolari ai lati, i piedi di queste perpendicolari sono in linea retta (retta di Wallace o di Simpson) (n. 149 e 171).

129. I triangoli che hanno un angolo comune ed i lati tangenti ad uno stesso cerchio, hanno eguale il perimetro, se il cerchio è esterno ai triangoli; ed hanno eguale la somma dei lati dell'angolo comune diminuita del terzo lato, se il cerchio è interno ai triangoli.

130. Sia un triangolo ABC; O, O' i centri del circolo iscritto e del circolo ex-iscritto tangente al lato BC. I quattro punti B, C, O, O' sono sopra una circonferenza, il cui centro è il punto medio dell'arco BC della circonferenza circoscritta.

131. In un triangolo ABC se si prolungano le altezze AD, BE, CF ad incontrare la circonferenza circoscritta in A', B', C' si ha:

1.° $HD = DA'$, $HE = EB'$, $HF = FC'$ dove H è il punto d'incontro delle altezze (unendo B con A' si ha $\widehat{A'BD} = \widehat{DBH}$ perchè complementi di $\widehat{C}$, da cui ecc.);

2.° Il punto H è il centro del cerchio iscritto nel triangolo A' B' C' (es. 121 e cor. n. 132).

132. In un triangolo i punti medi dei lati, i piedi delle altezze, ed i punti medi dei segmenti delle altezze comprese fra i vertici ed il punto d'incontro delle altezze si trovano sopra una circonferenza, che si dice *circonferenza dei nove punti* o di *Feuerbach*; questi ultimi sono diametralmente opposti ai primi.

133. Sia ABC un triangolo, M un punto del suo piano; si unisca il punto M coi punti medi D, E, F dei lati BC, CA, AB e si prolunghino MD, ME, MF di altrettanto in A', B', C' (cioè sia $DA' = MD$ ecc.). Dimostrare:

1.° I triangoli ABC, A'B'C' hanno i lati eguali ed in direzione opposta.

2.° Le AA', BB', CC' passano per uno stesso punto O, nel quale si dimezzano.

3.° Se M è il mediocentro (punto d'incontro delle me-

diane) del triangolo ABC, lo è anche di A'B'C' e coincide con O.

4.º Se M è l'ortocentro (punto d'incontro delle altezze) di ABC, i due triangoli ABC, A'B'C' sono iscritti nello stesso cerchio di cui O è il centro.

5.º Se M è il centro del cerchio circoscritto ad ABC, è anche l'ortocentro di A'B'C', e reciprocamente l'ortocentro di ABC è il centro del cerchio circoscritto ad A'B'C'.

134. Se più triangoli sono iscritti nello stesso cerchio con un lato comune, trovare i luoghi

1.º dell'ortocentro (punto d'incontro delle altezze);

2.º del centro del cerchio dei nove punti (eserc. 132);

3.º del centro del cerchio iscritto;

4.º dei centri dei cerchi ex-iscritti.

135. Costruire un triangolo data l'altezza, la mediana e la bisettrice che partono dallo stesso vertice.

CAPITOLO IV

136. Dimostrare il teorema n. 198 ricorrendo ai sum-multipli. (Detto H il punto d'incontro di AF con BC (fig. 104) si cerchi una parte aliquota di $BC < BH$; sia $BL = \frac{1}{3} BC$; si conduca da L la parallela ad AB; si otterranno così un rettangolo ed un pllgr. nelle condizioni del primo caso).

137. In un triangolo se si unisce il punto d'incontro delle mediane coi vertici, il triangolo è diviso in tre triangoli equivalenti.

138. Un triangolo viene decomposto dalle sue mediane in sei triangoli equivalenti.

139. Due triangoli equivalenti e di egual base hanno altezze eguali.

140. Dimostrare il teor. 200 sul trapezio trasformando questo in un pllgr.

141. Il trapezio equivale al rettangolo di uno dei lati non paralleli e della distanza da questo del punto medio del lato opposto.

142. In un trapezio se si uniscono gli estremi di uno dei lati non paralleli col punto medio del lato opposto, si ha un triangolo che è la metà del trapezio.

143. Se si unisce un punto del piano di un pllgr. coi quattro vertici si ottengono quattro triangoli; la somma o la differenza di due di questi triangoli che hanno per basi due lati opposti del pllgr. equivale alla metà del pllgr. Distinguere i due casi.

144. Se P è un punto del piano del pllgr. $ABCD$, dimostrare che il triangolo PBD equivale alla somma o alla differenza dei triangoli PAB , PBC (Teorema di Varignon) Distinguere i due casi. (Eserc. 57).

145. Sia $ABCD$ un quadrato; E , F , G , H i punti medi dei lati AB , BC , CD , DA . Le rette AF , BG , CH , DE incontrandosi determinano un altro quadrato che è la quinta parte del primo.

146. Se per i vertici d'un quadrangolo si conducono le parallele alle diagonali, si ottiene un pllgr. che è doppio del quadrangolo.

147. Dal teorema precedente dedurre che due quadrangoli sono equivalenti, se hanno le diagonali eguali e che formano tra loro angoli eguali.

148. In un trapezio una retta qualunque condotta pel punto medio della mediana e che incontri le basi, divide il trapezio in due parti equivalenti (mediana d'un trapezio è il segmento che congiunge i punti medi delle basi).

149. Sia $ABCD$ un quadrangolo; pel punto di mezzo della diagonale AC si conduca la parallela all'altra diagonale ad incontrare in E , F rispettivamente i lati BC , CD . La BF (oppure la DE) divide il quadrangolo in due parti equivalenti. (Si conduca da A la parallela a BD ad incontrare CD in H , e si unisca B con H ; i triangoli BAD , BHD sono equivalenti, di più F è il punto medio di CH , da cui...).

150. Sui lati AB , AC d'un triangolo ABC ed esternamente ad esso si costruiscano due pllgr. $ABDE$, $ACGH$; si prolunghino DE , GH ad incontrarsi in L . Si costruisca su BC un pllgr. coi lati eguali e paralleli a BC ed AL ; questo equivale alla somma dei primi due. (Teorema di Pappo). Dedurre il teorema di Pitagora.

151. Se nella figura per la dimostrazione del teorema di Pitagora si uniscono successivamente i vertici dei quadrati, si chiudono tre triangoli equivalenti al lato.

152. Se un quadrilatero è diviso da ciascuno dei seg-

menti che unisce i punti medi dei lati opposti in due parti equivalenti, il quadrilatero è parallelogrammo.

153. Enunciare e dimostrare i teoremi rappresentati simbolicamente dalle due relazioni:

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2a^2 + 2b^2$$

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab.$$

154. In un triangolo se il quadrato di un'altezza equivale al rettangolo dei segmenti in cui essa divide il lato opposto, l'angolo opposto a questo lato è retto, se minore l'angolo è ottuso, se maggiore acuto.

155. In un triangolo se il quadrato di un lato equivale al rettangolo di un altro lato e della proiezione del primo su questo, l'angolo opposto al secondo lato è retto, se minore l'angolo è ottuso, se maggiore acuto.

156. In un triangolo la differenza dei quadrati di due lati equivale al doppio rettangolo del terzo lato e della proiezione su di esso della mediana corrispondente.

157. In un triangolo ABC se M è il mediocentro (punto d'incontro delle mediane) si ha:

$$AB^2 + AC^2 + BC^2 = 3(AM^2 + BM^2 + CM^2).$$

158. In un triangolo il quadrato di un lato equivale alla somma dei quadrati delle mediane che partono dagli estremi del lato diminuita della somma dei quadrati delle metà degli altri due lati.

159. Sui lati di un triangolo ABC come diametri ed esternamente ad esso si descrivano tre semicirconferenze: si conducano le altezze e si prolunghino ad incontrar le semicirconferenze rispettivamente in A', B', C': dimostrare che

$$AC' = AB', \quad BA' = BC', \quad CB' = CA'.$$

160. Sia ABC un triangolo isoscele, M un punto della base BC o del prolungamento. Dimostrare che

$$MB \cdot MC = AC^2 - MB^2. \text{ (n. 213).}$$

161. In un rettangolo la somma dei quadrati delle distanze di un punto interno da due vertici opposti equivale alla somma dei quadrati delle distanze dagli altri due.

162. Se le diagonali d'un quadrilatero si tagliano ad angolo retto, la somma dei quadrati di due lati opposti equivale alla somma dei quadrati degli altri due.

163. In un quadrilatero la somma dei quadrati dei quattro lati equivale alla somma dei quadrati delle diagonali au-

mentata di quattro volte il quadrato del segmento che unisce i punti medi delle diagonali. (Teorema di Eulero) (n. 218).

164. In un quadrilatero la somma dei quadrati delle diagonali equivale al doppio della somma dei quadrati dei segmenti che uniscono i punti medi dei lati opposti (n. 218, cor.)

165. Sopra un diametro d'un cerchio si prendano due punti equidistanti dal centro: per uno di essi si faccia passare una corda qualunque e gli estremi di questa si congiungano coll'altro punto. La somma dei quadrati dei lati del triangolo risultante è costante ed equivalente a sei volte il quadrato del raggio più due volte il quadrato della distanza che uno dei due punti ha dal centro (n. 218, 219).

166. Sia ABC un triangolo; da un punto M interno al medesimo si calino le MA', MB', MC' perpendicolari rispettivamente ai lati BC, CA, AB. Dimostrare che la somma dei quadrati di tre segmenti non consecutivi BA', CB', AC' equivale alla somma dei quadrati degli altri tre. Reciprocamente se si dividono i lati di un triangolo in due parti tali che la somma dei quadrati di tre segmenti non consecutivi equivalga alla somma dei quadrati degli altri tre, le perpendicolari ai lati elevate dai punti di divisione concorrono in un punto.

167. Dedurre dal teorema precedente:

1.° le perpendicolari ai lati d'un triangolo nei punti di mezzo concorrono in un punto;

2.° le altezze d'un triangolo concorrono in un punto;

3.° le perpendicolari ai lati d'un triangolo condotte per i punti di contatto del cerchio iscritto o degli ex-isritti concorrono in un punto.

168. Se due circonferenze si intersecano, le tangenti condotte ad esse da un punto della secante comune sono eguali. Reciprocamente se le tangenti condotte da un punto a due circonferenze che si intersecano sono eguali, quel punto giace sulla secante comune alle dette circonferenze (n. 219, 2.° caso). Dedurre che se tre circonferenze s'intersecano due a due, le tre secanti concorrono in un punto, che ha la proprietà che le tangenti condotte dal medesimo alle tre circonferenze sono eguali.

169. Luogo dei punti tali che la somma dei quadrati delle distanze da due punti fissi è costante (n. 218).

170. Luogo dei punti tali che la differenza dei quadrati

delle distanze da due punti fissi è costante. (Eserc. n. 156).

171. Trasformare un triangolo in un altro di data altezza.

172. Dividere un triangolo in due parti equivalenti con una retta condotta per un punto preso sopra un lato. (Si unisca questo punto col vertice opposto e dal punto medio del lato si conduca la parallela a questa congiungente, ecc.).

173. Dividere un quadrilatero in due parti equivalenti con una retta condotta per un vertice. (Si trasformi il quadrilatero in un triangolo conducendo la diagonale pel vertice fissato).

174. Dividere un quadrilatero in due parti equivalenti con una retta condotta da un punto preso sopra un lato. (Si trasformi il quadrilatero in un altro avente un vertice nel punto fissato, e si ricade nell'esercizio 173).

CAPITOLO V

175. Dato un triangolo ABC, si divida il lato AB in n parti eguali e dai punti di divisione si conducano le parallele a BC: dai punti di divisione del lato AC (compresi gli estremi) si conducano le parallele ad AB a terminare alle parallele a BC immediatamente inferiori ed a quelle immediatamente superiori a ciascun punto considerato. Si ottengono così $n - 1$ pllgr. interni al triangolo ed n parallelogrammi con una parte esterna al triangolo. Dimostrare che al raddoppiare di n , le somme dei pllgr. esterni e quelle degli interni sono convergenti: il loro limite è il triangolo.

176. Dedurre dall'esercizio precedente che i triangoli di egual base e di eguale altezza sono equivalenti.

177. La stessa questione sul trapezio, mediante parallele alle basi.

178. In un triangolo la bisettrice di un angolo divide il lato opposto in due parti che stanno tra loro come gli altri due lati, e reciprocamente. (Si conduca la parallela alla bisettrice da un estremo del lato opposto e si applichi il teorema di Talete).

179. In un triangolo la bisettrice di un angolo esterno incontra il lato opposto prolungato (se il triangolo non è

isoscele) in un punto tale che le sue distanze dagli estremi del lato stanno come gli altri due lati, e reciprocamente. (Come il precedente).

180. Dati sopra una retta tre punti A, B, C, trovarne un quarto X tale che: $BX : AX = AX : CX$. (Si prenda X fra A e B).

181. Sia AB un segmento, O il punto di mezzo. Trovare sulla retta AB un punto X tale che: $AX : BX = BX : OX$.

182. Data l'altezza del triangolo equilatero calcolarne il lato e l'area.

183. Di un triangolo rettangolo si conosce l'ipotenusa a (o la mediana m rispetto all'ipotenusa) e l'altezza h ; calcolare i cateti, le loro proiezioni sull'ipotenusa e l'area (si calcolino prima la somma e la differenza dei cateti).

184. Dimostrare che l'area d'un triangolo rettangolo è data da: $p(p - a)$, dove p è il semiperimetro ed a l'ipotenusa.

185. I lati d'un rettangolo sono a, b ; calcolare le diagonali; le distanze che due vertici opposti hanno dalla diagonale degli altri due; i segmenti in cui è divisa questa diagonale; i lati e l'area del plgr. determinato da dette distanze.

186. In un triangolo di lati a, b, c calcolare le distanze dai vertici dei centri del cerchio iscritto e dei cerchi ex-isritti (Es. 119).

187. Di un triangolo isoscele si conosce il perimetro $2p$ e l'altezza h (concorrente coi lati eguali): si trovino i lati e l'area.

188. Indicando con x, y, z le distanze che un punto del piano di un triangolo ha dai lati a, b, c , e dando a ciascuna di esse il segno + o il segno - secondo che rispetto al lato cui è perpendicolare è dalla stessa banda o da bande opposte dell'altezza corrispondente, dimostrare che:

$$ax + by + cz = 2s$$

dove s è l'area del triangolo.

189. Dall'esercizio precedente dedurre la relazione seguente:

$$\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} = 1$$

dalla quale facendo coincidere successivamente il punto

(x, y, z) coi centri del cerchio iscritto e dei cerchi ex-isritti si deduce:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}, \quad \frac{1}{r_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a},$$

$$\frac{1}{r_b} = \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b}, \quad \frac{1}{r_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}$$

da cui

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}.$$

190. Di un trapezio si conoscono i quattro lati a, b, c, d (a, b sono le basi): calcolare l'altezza, l'area, le diagonali e la mediana; non che i lati e l'area del pligr. che ha per vertici i punti medi dei lati. (Si cominci dal considerare il triangolo che ha per lati la differenza delle basi e gli altri due lati).

191. Esprimere le mediane d' un triangolo dati i tre lati e reciprocamente date le mediane trovare i lati (n. 218).

192. Esprimere le bisettrici degli angoli d' un triangolo dati i tre lati (n. 221 ed es. 178).

193. Esprimere l' area del triangolo per mezzo delle mediane. (Si cominci dal provare che il triangolo che ha per lati i $\frac{2}{3}$ delle mediane equivale ad $\frac{1}{3}$ del dato, perciò il triangolo che ha per lati i doppi delle mediane è triplo del dato, da cui ecc.).

194. Esprimere l' area ed i lati del triangolo per mezzo delle altezze. (Si osservi che

$$ah_a = bh_b = ch_c = 2s,$$

ossia

$$a : \frac{1}{h_a} = b : \frac{1}{h_b} = c : \frac{1}{h_c} = 2s$$

da cui

$$p = s \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right),$$

analogamente si ricavano $p - a, p - b, p - c$; moltiplicando membro a membro e riducendo, si deduce s ; noto s , si deducono a, b, c .

195. Se i lati di un triangolo sono dati dai tre numeri razionali $m + \frac{1}{m}$, $n + \frac{1}{n}$ e $m + n - \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)$, anche l'area è un numero razionale $\left(\frac{(m+n)(mn-1)}{mn}\right)$.

196. Un triangolo equilatero ha i vertici sopra tre rette parallele: le distanze della parallela di mezzo dalle altre due sono a e b . Trovare il lato del triangolo $\left(2\sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}\right)$.

197. Se b e c sono i cateti d'un triangolo rettangolo, a l'ipotenusa ed h l'altezza relativa, anche il triangolo che ha per lati $b + c$, h ed $a + h$ è rettangolo.

198. In un triangolo rettangolo se b e c sono i cateti ed h l'altezza relativa all'ipotenusa dimostrare che

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

199. Dedurre dal teorema precedente la costruzione del segmento x dato dalla relazione:

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \dots + \frac{1}{m^2};$$

dove $a, b, c, \dots, m$ sono segmenti dati.

200. In un triangolo ABC se la somma degli angoli $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ è eguale ad un retto, si ha:

$$2a^2 = (b + c)^2 + (b - c)^2;$$

se invece la differenza degli angoli $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ è eguale ad un retto, si ha:

$$2a^{-2} = (b + c)^{-2} + (b - c)^{-2}.$$

201. In un triangolo ABC se O è il centro del cerchio iscritto, si ha:

$$\begin{aligned} &AO^2 + BO^2 + CO^2 = \\ &= \frac{ab(p-c) + ac(p-b) + bc(p-a)}{p}. \end{aligned}$$

202. In un triangolo ABC se M è il punto, dove si vedono i lati del triangolo sotto lo stesso angolo, posto

$$MA = x, MB = y, MC = z,$$

si ha:

$$x(c^2 - b^2) + y(a^2 - c^2) + z(b^2 - a^2) = 0.$$

203. Sia ABC un triangolo, M un punto interno pel quale passano le parallele ai tre lati; queste incontrino i tre lati BC, CA, AB nei punti D, D'; E, E'; F, F' rispettivamente; e sieno x, y, z le distanze del punto M dai lati stessi. Dimostrare che

$$x (ME - MF') + y (MF - MD') + z (MD - ME') = 0$$

(Si sommino le aree dei parallelogrammi risultanti espresse in modi diversi).

CAPITOLO VI

(dal § 1.^o al § 9.^o)

204. Una mediana di un triangolo (o di un trapezio) è il luogo dei punti medi dei segmenti paralleli al lato su cui cade la mediana stessa (alle basi del trapezio) (n. 317).

205. Una mediana d'un triangolo (o d'un trapezio) è il luogo dei punti d'incontro delle congiungenti gli estremi del lato su cui cade la mediana (o di una base) cogli estremi di un segmento parallelo al lato stesso compreso tra gli altri due lati.

206. In un triangolo i rettangoli dei segmenti in cui le altezze sono divise dal loro punto d'incontro sono equivalenti.

207. In un triangolo ABC si faccia $\widehat{ACD} = \widehat{ABC}$; dimostrare che AC è medio proporzionale fra AB ed AD.

208. Se in un triangolo rettangolo è iscritto un quadrato con un lato sulla ipotenusa, questa è divisa in tre parti in proporzione continua.

209. Un parallelogrammo è medio proporzionale fra i rombi equiangoli descritti sui suoi lati.

210. Due triangoli che hanno le mediane proporzionali sono simili.

211. Due triangoli che hanno le altezze proporzionali sono simili.

212. Data una retta ed una circonferenza, da un estremo M del diametro perpendicolare alla retta si conducano delle rette ad incontrare rispettivamente la retta in A, B, C, D... e la circonferenza in A', B', C', D'.... Dimostrare che i seg-

menti MA, MB, MC, MD... sono inversamente proporzionali ai segmenti MA', MB', MC', MD'...

213. Sia ABC un triangolo, una parallela a BC incontri in D, E i lati AB, AC; le CD e BE incontrino in F, G la parallela a BC condotta per A. Dimostrare che $AF = AG$.

214. I triangoli ABC, ABD abbiano comune il lato AB ed i vertici C, D sopra una retta parallela ad AB. Si conduca una parallela ad AB: dimostrare che i segmenti di questa intercetti fra i lati CA, CB e DA, DB sono eguali.

215. Se il segmento AB è diviso in C nel rapporto $m:n$, e se dai punti A, C, B si conducono tre parallele ad incontrare una retta qualunque (che non tagli il segmento AB) in A', C', B' si ha:

$$(m + n) CC' = nAA' + mBB'$$

Modificare il teorema nel caso che la retta tagli il segmento AB.

216. Se dai vertici d' un triangolo e dal punto d'incontro delle mediane si conducono quattro parallele terminate ad una retta qualunque esterna al triangolo, quella che parte dal mediocentro è la media delle altre tre (il terzo della loro somma). Modificare il teorema nel caso che la retta attraversi il triangolo. Che avviene se la retta passa pel punto d'incontro delle mediane? (Eserc. precedente).

217. Sia ABC un triangolo e sia AA' la bisettrice dell'angolo $\widehat{A}$: dal punto medio di AA' si conduca a questa la perpendicolare ad incontrare in P il prolungamento di BC. Dimostrare che $\frac{CP}{BP} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2$.

218. Sia ABC un triangolo; le congiungenti i vertici A, B, C con un punto interno O incontrino i lati opposti rispettivamente in D, E, F. Dimostrare che:

$$\frac{AO}{OD} = \frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB}$$

(Si conducano la D le DL, DM parallele e BE, CF: si ha

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AE}{EL} \times \frac{EL}{EC} \quad \text{e} \quad \frac{AF}{FB} = \frac{AF}{FM} \times \frac{FM}{FB};$$

ma

$$\frac{AE}{EL} = \frac{AF}{FM} = \frac{AO}{OD}; \quad \frac{EL}{EC} = \frac{BD}{BC}, \quad \frac{FM}{FB} = \frac{CD}{BC};$$

sostituendo e sommando ecc...)

219. Se in un triangolo un lato è medio proporzionale fra un altro lato e la sua proiezione su questo, il triangolo è rettangolo.

220. Se in un triangolo un'altezza è media proporzionale fra i segmenti in cui divide il lato per cui cade, il triangolo è rettangolo.

221. Se in un triangolo rettangolo un cateto è medio proporzionale fra l'ipotenusa e l'altro cateto, l'altezza divide l'ipotenusa in sezione aurea, e reciprocamente.

222. I centri di due cerchi (esterni l'uno all'altro) e i punti d'incontro della retta dei centri colle tangenti comuni formano un gruppo armonico.

223. Se quattro punti formano un gruppo armonico, la metà del segmento terminato da due punti coniugati è media proporzionale fra le distanze che il punto medio del detto segmento ha dagli altri due punti e reciprocamente.

224. Sia O una circonferenza, M un punto esterno, AB il diametro passante per M; P, Q i punti di contatto delle tangenti condotte per M; ed R il punto d'incontro di PQ con AB. Dimostrare che il diametro AB è diviso armonicamente nei punti M, R. (Ved. es. precedente).

225. Se due gruppi armonici hanno un punto comune, le congiungenti le altre coppie di punti corrispondenti concorrono in un punto.

226. Sia $\widehat{BAC}$ un angolo qualunque ed M un punto dal quale si traccino delle rette ad incontrare i lati dell'angolo nei punti B, C; B', C'; ecc... il luogo dei coniugati armonici di M rispetto alle coppie B, C; B' C'; ecc.... è una retta che passa per A (Vedasi eserc. preced.).

227. In un gruppo armonico di raggi (concorrenti o paralleli) le distanze che i punti di un raggio hanno da due raggi coniugati sono proporzionali alle distanze che i punti dell'altro raggio hanno dagli stessi raggi coniugati.

228. Sia il triangolo ABC; si prolunghi BC in O in modo che $BC = CO$. Si congiunga O con A, da C si conduca la CB_1 parallela ad AO: si conduca B_1O che tagli AC in C_1 ; da C_1 si conduca C_1B_2 parallela ad AO; dipoi la B_2O che

tagli AC in C_2 ; da C_2 la C_2B_3 parallela ad AO e così via. Dimostrare che

$$AB_1 = \frac{1}{2} AB, \quad AB_2 = \frac{1}{3} AB, \dots \quad AB_{n-1} = \frac{1}{n} AB.$$

229. Se due figure F_1, F_2 sono omotetiche, ed una di esse si muove in modo che i suoi punti percorrono tratti eguali e nella stessa direzione, trovare quale spostamento subisce il centro d'omotetia.

230. Il parallelogrammo che ha per vertici i punti medi dei lati d'un quadrilatero, e quello formato dalle parallele alle diagonali di questo condotte per i vertici, sono omotetici direttamente rispetto al punto d'incontro delle diagonali del quadrilatero stesso.

231. Sia ABC un triangolo, O il centro del cerchio iscritto c ; O_1, O_2, O_3 i centri dei cerchi ex-iscritti c_1, c_2, c_3 (compresi negli angoli $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$); D, E, F i punti di contatto del cerchio iscritto coi lati BC, CA, AB; D_1, D_2, D_3 i punti di contatto dei cerchi c_1, c_2, c_3 col lato BC; E_1, E_2, E_3 i punti di contatto col lato CA; F_1, F_2, F_3 i punti di contatto col lato AB. Dimostrare che i triangoli DEF, $O_1O_2O_3$ sono omotetici direttamente; che i triangoli $D_1E_1F_1, O_2O_3$; $D_2E_2F_2, O_1O_3$; $D_3E_3F_3, O_1O_2$ sono omotetici inversamente. Determinare i rapporti di omotetia

$$\left(\frac{r}{2R}, \frac{r_a}{2R}, \frac{r_b}{2R}, \frac{r_c}{2R} \right).$$

232. Sia ABC un triangolo; A', B', C' i piedi delle altezze. Si iscriva nel triangolo $A' B' C'$ la circonferenza e sieno $A_1B_1C_1$ i punti di contatto coi lati $B'C', C'A', A'B'$. Dimostrare che i triangoli ABC, $A_1B_1C_1$ sono omotetici direttamente.

233. In un triangolo ABC sieno A_1, B_1, C_1 i punti medi dei lati BC, CA, AB; H l'ortocentro (punto d'incontro delle altezze); G il mediocentro (punto d'incontro delle mediane); O il centro del cerchio circoscritto; O_1 il centro del cerchio circoscritto al triangolo $A_1 B_1 C_1$. Dimostrare

1° I punti H, G, O, O_1 sono in linea retta (retta di Eulero); $HG = 2GO$ e $OO_1 = O_1H$.

2° La circonferenza $A_1 B_1 C_1$ passa per i punti medi

dei segmenti HA, HB, HC e per i piedi delle altezze (circonf. di Feuerbach o dei nove punti).

(1° Si osservi che i triangoli OB_1C_1 , HBC sono omotetici inversamente; così pure i triangoli ABC, $A_1B_1C_1$.

2° Se A_2 è il punto medio di HA, siccome O_1 è il punto medio di HO, si ha $O_1A_2 = \frac{1}{2} OA$, perciò....

Se A_3 è il piede dell'altezza condotta da A trovasi sulla circonf. di diametro A_1A_2 , perciò....).

234. Luogo dei punti tali che le loro distanze da due rette parallele stieno tra loro in un rapporto dato.

235. Luogo dei punti tali che le loro distanze da due rette concorrenti stieno tra loro in un rapporto dato.

236. Luogo dei punti da cui due segmenti di una stessa retta (adiacenti o no) si vedono sotto angoli eguali (n. 342).

237. Costruire il segmento quarto proporzionale dopo tre segmenti dati approfittando del teor. n. 293, 2.º.

238. Costruire il segmento terzo proporzionale dopo due segmenti dati approfittando del teor. n. 293, 1.º, oppure del 2.º.

239. Costruire il segmento medio proporzionale fra due segmenti approfittando del teor. n. 293, 2.º.

240. Dati tre punti d'un gruppo armonico trovare il quarto.

241. Costruire un poligono simile ad un poligono dato, il cui perimetro sia eguale ad un segmento dato.

242. Dividere un segmento in tre parti tali che il rapporto della prima alla seconda sia eguale a quello di $m : n$; e quello della seconda alla terza al rapporto di $p : q$.

243. Trovare due segmenti dati la loro differenza ed il loro rapporto eguale a quello di due segmenti dati.

244. Costruire un triangolo dati un lato, l'angolo opposto ed il rapporto degli altri due lati.

245. Costruire un triangolo date le tre altezze.

246. In un triangolo iscrivere un quadrato od un rettangolo simile ad un rettangolo dato.

247. Iscrivere in un triangolo un secondo triangolo coi lati paralleli a tre rette date.

248. Dedurre dal teorema n. 347 che due triangoli che hanno un angolo eguale compreso fra lati inversamente proporzionali sono equivalenti.

249. Due triangoli che hanno un angolo eguale e stanno come le somme dei quadrati dei lati, sono simili.

250. Se in un triangolo ABC si dividono i lati AB, AC in D, E in modo che:

$AD : DB = m : n$ e $AE : EC = (m + n) : (m - n)$ ($m > n$), la DE divide il triangolo in due parti equivalenti.

251. In un triangolo ABC, se dal punto O si vedono i tre lati sotto lo stesso angolo e si conducono le AO, BO, CO ad incontrare i lati opposti in A', B', C' dimostrare che:

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OA'} = \frac{1}{OB} + \frac{1}{OB'} = \frac{1}{OC} + \frac{1}{OC'}$$

252. Sieno ABC, ADE due triangoli simili sovrapposti con DE parallela a BC, e sieno M ed N i punti medi di DB e di EC. Dimostrare che:

$$ADC = 2AMN - \frac{1}{2} (ABC + ADE).$$

253. Se in un trapezio di basi a, b ($a > b$) si dividono a partire da a gli altri due lati nel rapporto

$$\left(a - \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \right) : \left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} - b \right)$$

la congiungente i punti di divisione divide il trapezio in due parti equivalenti. (Si cerchi il valore della congiungente (eserc. 215) e si trovi l'area di uno dei due trapezi).

254. Siano ABC un triangolo, AA', BB', CC' le bisettrici degli angoli. Indicando con s, s' le aree dei triangoli ABC, A'B'C' dimostrare che:

$$s' = s \cdot \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

dove a, b, c sono le lunghezze dei lati BC, CA, AB del triangolo ABC. (L'area s' si ottiene sottraendo da s tre triangoli le cui aree si hanno per mezzo dei num. 287 e 347).

255. Se si dividono i lati d'un triangolo ABC in A', B', C' in modo che:

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{l}{m}, \quad \frac{B'C}{B'A} = \frac{l'}{m'}, \quad \frac{C'A}{C'B} = \frac{l''}{m''},$$

si ha che

$$\frac{A'B'C'}{ABC} = \frac{l l' l'' + m m' m''}{(l + m)(l' + m')(l'' + m')}$$

(Come caso particolare si ha l'esercizio precedente).

256. In un triangolo ABC rettangolo in A si conduca l'altezza AD: se r, r_1, r_2 sono i raggi dei cerchi iscritti nei triangoli ABC, ABD, ACD, si ha: $r^2 = r_1^2 = r_2^2$.

257. Sia ABCD un quadrilatero; si dividano i lati nello stesso rapporto, cioè in modo che:

$$AE : EB = BF : FC = CG : GD = DH : HA = m.$$

Dimostrare che la somma dei triangoli AHE, FCG equivale alla somma degli altri due EBF, GDH. Dedurne il rapporto delle aree dei quadrilateri ABCD, EFGH. (Si confrontino questi triangoli con quelli in cui ciascuna diagonale decompone il quadrilatero; (n. 347).

258. Se a, b, c, d sono le lunghezze dei lati d' un quadrilatero iscritto, dimostrare che l'area s è data da:

$$s = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

dove p è il semiperimetro.

(Se ABCD è il quadrilatero e $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$, si prolunghino AB, DC ad incontrarsi in O; $\Delta ADO, BCO$ sono simili, da cui si deduce

$$ABCD = \frac{d^2 - b^2}{d^2} ADO.$$

Si esprima l'area ADO in funzione dei lati, ponendo $BO = m, CO = n$; di poi dai Δ simili ADO, BCO e da teoremi sulle proporzioni (n. 282, 4°) si ha:

$$a + m + c + n = \frac{d}{d-b} (a + c),$$

$$a + m - c - n = \frac{d}{d+b} (a - c)$$

sostituendo nella relazione dell'area e riducendo si ha....).

259. Se il quadrilatero dell'esercizio precedente è anche circoscrittibile, si ha:

$$s = \sqrt{abcd}.$$

260. Trasformare un triangolo in un triangolo isoscele avente un angolo comune col primo (n. 347).

261. Trasformare un triangolo in un altro avente un angolo in comune col primo e il lato opposto parallelo ad

una retta data. (Sia ABC il triangolo e BH la direzione assegnata, e sia ADE il triangolo cercato: si ha $ADE : ABH = AE^2 : AH^2$ ed $ABC : ABH = AC : AH$, da cui ecc.).

262. In un pllgr. si uniscano i punti medi di ciascun lato cogli estremi del lato opposto. Dimostrare che l'ottagono formato dalle congiungenti è $\frac{1}{6}$ del pllgr. (Si conducano le diagonali e le congiungenti i punti medi dei lati opposti, e si confrontino gli otto triangoli in cui è scomposto l'ottagono con quelli in cui è scomposto il pllgr. (n. 347).

263. Dividere un triangolo ABC in due o più parti equivalenti o proporzionali a segmenti dati, con rette parallele ad un lato BC . (Si divida AB in due o più parti uguali, o proporzionali ai segmenti dati; dai punti di divisione le perpendicolari ad AB ad incontrare la semicirconf. di diametro AB ; le distanze dei punti d'intersezione da A si portino su AB , e dagli estremi di queste le parallele a BC ; n. 347 e 286 Cor. 2.^o).

264. Dividere un trapezio in due parti equivalenti, o proporzionali a due segmenti dati, con una parallela alle basi. (Si prolunghino i lati non paralleli ad incontrarsi e si considerino i triangoli risultanti; n. 347 e 286, Cor. 2.^o).

(Dal § 10.^o alla fine)

265. Le diagonali d'un pentagono regolare si dividono in sezione aurea: il lato è eguale alla parte aurea.

266. Le diagonali d'un pentagono regolare determinano coi loro punti d'incontro un altro pentagono regolare. Qual'è il rapporto dei due pentagoni?

267. I prolungamenti dei lati d'un pentagono regolare determinano coi loro punti d'incontro un altro pentagono regolare. Qual'è il rapporto dei due pentagoni?

268. Il dodecagono regolare iscritto equivale al triplo del quadrato del raggio.

269. Siano S_n , s_n i poligoni regolari circoscritto ed iscritto di n lati, ed s_{2n} il poligono regolare iscritto di un numero doppio di lati. Dimostrare che: $S_n : s_{2n} = s_{2n} : s_n$.

270. L'esagono regolare iscritto è doppio del triangolo regolare iscritto nello stesso cerchio.

271. Le diagonali d'un esagono regolare, che non lo dimezzano, determinano incontrandosi un altro esagono regolare. Qual'è il rapporto dei due esagoni?

272. I raggi OA , OB , OC d'un cerchio dividano questo in tre parti eguali: si prolunghino detti raggi in A' , B' , C' in modo che OA' , OB' , OC' sieno eguali al lato del quadrato iscritto. Dimostrare che il triangolo $A' B' C'$ equivale all'esagono iscritto.

273. In due circonferenze di raggi diseguali il rapporto di due angoli al centro che intercettano archi equivalenti è eguale al rapporto inverso dei raggi.

274. Se si divide in un numero qualunque di parti, ma finito, un diametro di una circonferenza, e sopra queste parti come diametri si descrivono delle circonferenze, la somma di queste equivale alla circonferenza data.

275. Se sui lati d'un triangolo rettangolo come diametri si descrivono tre semicirconferenze in modo che quella descritta sull'ipotenusa contenga il triangolo e le altre due sieno esterne, la somma delle *lunule* limitate da queste semicirconferenze (*lunule* di Ippocrate) equivale al triangolo.

276. Sui lati d'un quadrato iscritto in un cerchio come diametri ed esternamente al quadrato si descrivano quattro semicirconferenze. La somma delle quattro lune limitate da queste e dalla prima circonferenza equivale al quadrato iscritto.

277. La corona circolare equivale al cerchio che ha per diametro la corda del cerchio maggiore tangente al minore.

278. Se due corde di un cerchio si tagliano ad angolo retto, la somma dei quattro cerchi che hanno per diametri le parti di queste corde equivale al cerchio dato.

279. Se due poligoni regolari simili sono l'uno iscritto e l'altro circoscritto ad un cerchio, questo è medio proporzionale fra il cerchio iscritto nel primo e quello circoscritto al secondo. Lo stesso dicasi delle circonferenze.

280. Data una circonferenza O si conduca un diametro AB , e presa la corda BC eguale al raggio, si conduca da O la perpendicolare a BC ad incontrare in D la tangente in B : a partire da D nella direzione DB si prenda DE eguale al triplo del raggio. Dimostrare che AE differisce dalla semicirconferenza di meno che sei centomillesimi del raggio.

281. Il perimetro del triangolo rettangolo che ha per cateti i tre quinti ed i sei quinti del diametro ha sulla circonferenza un eccesso minore del decimillesimo del raggio.

282. Si prendano sulla circonferenza gli archi $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ eguali ad un quarto e ad un sesto della circonferenza; si conduca per A e pel punto medio D del segmento BC la corda AE. Questa è inferiore al lato del quadrato equivalente al cerchio di meno che cinque decimillesimi del raggio.

283. Sia AB il diametro di una circonferenza O: si dimezzi il raggio OB in E e si prolunghi AB di un segmento $BF = BE$: di poi sopra il raggio AO si prenda $AD = \frac{2}{5} AO$. Sopra

DE ed AF come diametri, e da bande opposte della AB, si descrivano due semicirconferenze, le quali incontrino in G ed in H la perpendicolare ad AB condotta per O. Il segmento GH supera il lato del quadrato equivalente al cerchio di meno che 2 centomillesimi del raggio.

284. Dimostrare che il teorema n. 390 vale anche se P_n , p_n , P_{2n} , p_{2n} ... rappresentano perimetri di linee poligonali simili regolari circoscritte ed iscritte ad uno stesso arco.

285. Se si indicano con s_n , S_n , s_{2n} , S_{2n} le aree dei settori poligonali regolari iscritti e circoscritti ad un settore circolare (o dei poligoni regolari iscritti e circoscritti ad un cerchio), dove il numero n dei lati va continuamente raddoppiando, i termini della serie: $\frac{1}{s_n}$, $\frac{1}{S_n}$, $\frac{1}{s_{2n}}$, $\frac{1}{S_{2n}}$ sono a partire dal terzo alternativamente medio geometrico e medio aritmetico dei due precedenti.

286. Dedurre dal teorema precedente un metodo pel calcolo del π in modo analogo a quello tenuto al n. 391.

287. Dimostrare che:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{2}{n}\right)^2} + \dots \right. \\ \left. \dots + \sqrt{1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^2} \right] = \frac{\pi}{4}$$

(Sia AOB un quadrante di cerchio col raggio eguale all'unità. Diviso il raggio OA in n parti eguali, si conducano le parallele ad OB e si iscrivano $n - 1$ rettangoli appoggiati

a queste parallele: la somma dei detti rettangoli cresce limitatamente al raddoppiare di n ed ha per limite il quadrante).

288. Dimostrare che:

$$\lim_{n=\infty} 2^{2n} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}}} = \pi$$

(dove il numero degli indici radicali è eguale all'esponente del 2). (Per la dimostrazione si trovino i lati, gli apotemi e si deducano le aree dei poligoni regolari di 4, 8, 16.... lati (vedi n. 373) iscritti nel cerchio di raggio unitario. La serie di questi poligoni cresce limitatamente e tende al cerchio, dunque le aree tendono all'area del cerchio).

289. Le lunghezze di due corde parallele in una circonferenza sono a e b ; la loro distanza d . Trovare il raggio.

290. La lunghezza di una corda in una circonferenza è a ; la freccia è d . Trovare il raggio.

291. Due circonferenze di raggio r sono tali che ciascuna passa pel centro dell'altra. Trovare l'area della parte comune ai due cerchi.

292. Sui raggi di un quadrante di cerchio come diametri ed internamente al quadrante si descrivano due semicirconferenze. Si calcolino le aree delle parti in cui il quadrante vien diviso dalle semicirconferenze essendo r il raggio del quadrante.

293. Coi centri nei vertici di un quadrato e raggio la semidiagonale si taglino i lati. Dimostrare che i detti punti di intersezione sono vertici di un ottagono regolare; e determinare l'area di uno dei quadrilateri mistilinei avente un vertice comune col quadrato.

294. Sia ABC un triangolo equilatero, D il centro del cerchio circoscritto. Si descrivano due archi $\widehat{BC}$ coi centri in A ed in D esternamente al triangolo. Pel punto F di mezzo del secondo arco $\widehat{BC}$ si conduca la tangente che incontri in E la DB. Dimostrare che il triangolo mistilineo FBF equivale alla lunula compresa fra i due archi $\widehat{BC}$.

295. Dividere un cerchio in due o più parti equivalenti con circonferenze tangenti internamente alla data in un punto dato.

296. Dividere un cerchio in sezione aurea con una circonferenza concentrica alla data. (Distinguere due casi).

APPENDICE

1.^o TEOREMA (di Menelao). *Sia ABC un triangolo; una retta qualunque incontri le rette dei lati AB, BC, CA nei punti D, E, F. Dimostrare che*

$$\frac{AD}{BD} \times \frac{BE}{CE} \times \frac{CF}{AF} = 1 \quad (1)$$

Condotta da C la parallela ad AB ad incontrare in H la DE, dai triangoli simili ECH, EBD si ha:

$$BE : CE = BD : CH$$

e dai triangoli simili FCH, FDA:

$$CF : AF = CH : AD$$

da cui

$$\frac{BE}{CE} \times \frac{CF}{AF} = \frac{BD}{AD}$$

e moltiplicando pel rapporto $\frac{AD}{BD}$ si ha la relazione (1).

2.^o Reciprocamente: *Se esiste la relazione (1), i tre punti D, E, F sono in linea retta.*

Si dimostra per assurdo supponendo che DF incontri BC in un punto diverso da E.

OSSERVAZIONE. Il teorema si può estendere ad un poligono.

3.^o TEOREMA (di Ceva). *Sia ABC un triangolo; le congiungenti i vertici A, B, C con un punto qualunque O incontrino le rette dei lati opposti in D, E, F. Dimostrare che*

$$\frac{AF}{BF} \times \frac{BD}{CD} \times \frac{CE}{AE} = 1 \quad (2)$$

Si applichi il teorema precedente al triangolo ABD tagliato dalla CF, ed al triangolo ACD tagliato dalla BE, e si moltiplichino le due relazioni.

4.º Reciprocamente: *Se esiste la relazione (2), le AD, BE, CF concorrono in un punto.*

Si dimostra per assurdo, supponendo che, detto O il punto d'incontro delle AD, BE, la CO incontri il lato AB in un punto diverso da F.

COROLLARIO. *In un triangolo le mediane, le bisettrici, le rette che uniscono i vertici coi punti di contatto dei lati coi cerchi iscritti, e quelle che uniscono i vertici coi punti di contatto dei lati coi cerchi ex-iscritti, passano per uno stesso punto.*

5.º Sia $\widehat{A}$ un angolo convesso; due trasversali incontrino i lati dell'angolo rispettivamente in B, C e B', C'. Si dice che B'C' è antiparallela a BC, se $\widehat{BC'} = \widehat{A'C'B'}$.

TEOREMA. *In un triangolo la coniugata isogonale (vedi es. 95) di una mediana, detta simediana, è il luogo dei punti medi dei segmenti antiparalleli al lato su cui cade.*

(Si faccia rotare il triangolo intorno alla bisettrice concorrente colla mediana. I lati dell'angolo si scambiano di posto, la mediana prende la posizione della simediana ed i segmenti dimezzati dalla mediana (eserc. 204) diventano antiparalleli al lato a cui sono paralleli.

6.º TEOREMA. *Sia ABC un triangolo, AE la simediana del vertice A. Dimostrare che: $AB^2 : AC^2 = BE : EC$.*

(Si conduca la mediana AD. I triangoli BAD, EAC hanno $\widehat{BAD} = \widehat{EAC}$, perciò $\frac{BAD}{AEC} = \frac{AB}{AC} \times \frac{AD}{AE}$; (n. 347) ma i me-

desimi triangoli hanno la stessa altezza, perciò $\frac{BAD}{EAC} = \frac{BD}{EC}$ da cui:

$\frac{AB}{AC} \times \frac{AD}{AE} = \frac{BD}{EC}$. Similmente si deduce $\frac{AB}{AC} \times \frac{AE}{AD} = \frac{BE}{DC}$. Moltiplicando e riducendo ecc.).

7.º TEOREMA. *Le simediane di un triangolo passano per uno stesso punto, detto il punto di Lemoine o di Beltrami.*

(Vedasi esercizio precedente ed il teorema di Ceva).

8.º TEOREMA. *Le distanze del punto di Beltrami dai lati sono proporzionali ai lati stessi.*

(Se AE è la simediana del vertice A , ed L il punto di Beltrami, per l'esercizio 218 si ha $\frac{AL}{LE} = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$, da cui $\frac{LE}{AE} = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$. Ora se x è la distanza di L dal lato BC si ha: $\frac{LE}{AE} = \frac{x}{h_a}$, da cui $\frac{x}{h_a} = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$ ed anche $\frac{x}{a} = \frac{ah_a}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{2s}{a^2 + b^2 + c^2}$. Analogamente per le altre due).

9.^o PROBLEMA. *Dati i lati d'un triangolo trovare le simediane (probl. n. 310).*

10.^o PROBLEMA. *Trovare la relazione fra la simediana e la mediana partente dallo stesso vertice; d'onde risulta che la mediana è maggiore della simediana (eserc. precedente).*

11.^o TEOREMA. *Dato un angolo e due coniugate isogonali se da un punto di ciascuna delle coniugate si conducono le perpendicolari ai lati dell'angolo:*

1.^o *i rettangoli dei segmenti perpendicolari allo stesso lato sono equivalenti,*

2.^o *gli estremi dei quattro segmenti perpendicolari ai lati dell'angolo sono sopra una circonferenza.*

12.^o Reciprocamente: *Se il rettangolo delle distanze di due punti da uno dei lati d'un angolo equivale al rettangolo delle distanze degli stessi punti dall'altro lato, le congiungenti i due punti col vertice dell'angolo sono coniugate isogonali rispetto all'angolo.*

13.^o TEOREMA. *Se tre rette condotte dai vertici d'un triangolo passano per uno stesso punto; le loro coniugate isogonali passano pure per uno stesso punto (esercizio precedente).*

14.^o TEOREMA. *Dedurre dall'esercizio precedente che le simediane d'un triangolo passano per un punto (teor. 7.^o).*

15.^o Ai punti notevoli del triangolo, che si sono studiati aggiungiamo i due di cui al seguente

TEOREMA. *In un triangolo ABC esiste un punto dal quale partono tre segmenti paralleli ai lati AB , BC , CA e terminati ai lati BC , CA , AB , che sono eguali; ed esiste un punto dal quale partono tre segmenti paralleli ai lati AC , OB , BA , e terminati ai lati CB , BA , AC , che sono eguali tra loro ed ai primi.*

Si conduca AQ bisettrice dell'angolo $\widehat{A}$ e da Q la QT parallela a BA; si avrà $\underline{TQ} = AT$. Similmente si conduca BP bisettrice dell'angolo $\widehat{B}$ e da P la PR parallela a CB; si avrà $PR = RB$. Si traccino le CR, BT che si incontrino in O. Si conducano da O i raggi paralleli rispettivamente ad AB, BC, CA che incontrino ordinatamente BC in D, CA in E, AB, in F. I tre segmenti OD, OE, OF sono eguali. Infatti i triangoli ATQ, FOD sono direttamente omotetici rispetto a B, e poichè $AT = TQ$ è pure $OF = OD$. Similmente $OD = OE$ per essere omotetici rispetto a C i triangoli PRB, EOD.

Immaginate ora nuovamente le bisettrici AQ, BP, si conduca da P la PR' parallela ad AB e da Q la QT' parallela a CA: di poi si traccino le CT' ed AR' che s'incontrino in O'. Si conducano da O' i raggi paralleli ad AC, CB, BA che incontrino rispettivamente CB in D', BA in E', AC in F'. I tre segmenti O'D', O'E', O'F' sono eguali. Si dimostra come per i precedenti.

Per avere il valore di questi segmenti si conduca AO ad incontrare BC in S. Dai triangoli simili SOD, SAB si ha

$$OD : c = OS : AS. \text{ Ora (eserc. 218) } \frac{AO}{OS} = \frac{AR}{RB} + \frac{AT}{TC};$$

$$\text{ma } \frac{AR}{RB} = \frac{AP}{PC} = \frac{c}{a}, \quad \frac{AT}{TC} = \frac{BQ}{QC} = \frac{c}{b} : \text{ sostituendo}$$

$$\frac{AO}{OS} = \frac{c}{a} + \frac{c}{b} = \frac{ca + cb}{ab}, \text{ da cui } \frac{OS}{AS} = \frac{ab}{ab + bc + ca}.$$

E sostituendo nella prima proporzione e ricavando OD, si ha

$$OD = \frac{abc}{ab + bc + ca}.$$

Similmente si ricava $O'D' = OD$.

Indicando con d_a, d_b, d_c le distanze dal punto O dai lati a, b, c , e con d'_a, d'_b, d'_c le distanze del punto O' dagli stessi lati, si può dimostrare che $d_a : d_b : d_c = b : c : a$; che $d'_a = d_b, d'_b = d_c, d'_c = d_a$.

PARTE SECONDA

ESERCIZI DI STEREOMETRIA

CAPITOLO I (dal § 1.^o al § 8.^o)

297. Tre rette che giacciono a due a due in un piano e non sono parallele s'incontrano in un punto.

298. Tre piani che a due a due s'incontrano secondo rette concorrenti hanno un punto comune.

299. Se da un punto si conducono le perpendicolari a due piani che si segano, e dai piedi di queste le perpendicolari all'intersezione dei due piani, queste ultime incontrano la detta intersezione in uno stesso punto.

300. Le perpendicolari ai piani di un fascio condotte da un punto giacciono in un piano.

301. Le perpendicolari condotte da un punto a piani, le cui intersezioni sono parallele, sono in un piano.

302. Estendere ai diedri gli esercizi 3.^o, 8.^o, 9.^o, sostituendo alle parole *angolo*, *vertice*, *lato*, le parole *diedro*, *spigolo*, *faccia*.

303. Dati due punti sopra le facce d'un diedro, qual'è la spezzata minima che li unisce, e che ha un vertice sullo spigolo del diedro?

304. Se per un punto dello spigolo di un diedro si conducono una obliqua allo spigolo in una faccia e la perpendicolare allo spigolo nell'altra, si ottiene un angolo che è maggiore eguale o minore della sezione normale del diedro, secondo che il diedro è acuto, retto od ottuso.

305. Se due diedri hanno le facce rispettivamente per-

pendicolari e gli spigoli paralleli sono eguali o supplementari (eserc. 14).

306. I piani condotti per un punto e perpendicolari a rette di un piano passano per una stessa retta.

307. Una retta ed un piano perpendicolari allo stesso piano sono paralleli.

308. Se una retta è parallela ad un piano, ogni retta parallela alla prima o è parallela al piano, o giace in esso.

309. Se tre piani sono paralleli ad una stessa retta e si segano a due a due le loro intersezioni sono tre rette parallele.

310. Una retta parallela a due piani che s'incontrano è parallela alla loro intersezione.

311. Se una retta è perpendicolare ad un piano, ogni piano parallelo alla retta è perpendicolare al piano.

312. Se una retta è parallela ad un piano, ogni piano perpendicolare alla retta è perpendicolare al piano.

313. Se per un punto O si conducono due rette OA , OB parallele ad un piano, e due piani perpendicolari alle rette OA , OB , l'intersezione di questi piani è perpendicolare al primo piano.

314. Due piani paralleli incontrano altri due piani paralleli secondo rette parallele.

315. Se due piani sono paralleli e dai punti di una figura situata in uno di essi si conduce un fascio di rette concorrenti in un punto ad incontrare l'altro piano, i punti di intersezione con questo formano una figura simile alla prima. Se il fascio è formato di parallele, la seconda figura è eguale alla prima.

316. I diedri colle facce parallele sono eguali o supplementari (n. 86.).

317. Estendere ai diedri formati da due piani paralleli con un piano secante l'esercizio 12.

318. Se due piani si incontrano, la proiezione sopra uno di essi di una retta perpendicolare all'altro, è perpendicolare all'intersezione dei due piani.

319. Se una retta incontra due piani che si segano in punti equidistanti dalla intersezione, la retta forma coi due piani angoli eguali, e reciprocamente.

320. Se per il piede di una retta obliqua ad un piano si conducono più rette nel piano stesso, quelle che fanno angoli eguali colla proiezione dell'obliqua fanno angoli eguali coll'obliqua stessa, e se fanno angoli diseguali colla proiezione, fanno angoli diseguali nello stesso senso coll'obliqua.

321. Per il centro di un cerchio si conduca una obliqua al piano del cerchio. Sui segmenti che uniscono un punto dell'obliqua coi punti della circonferenza enunciare e dimostrare un teorema analogo a quello del n. 443.

322. Data una retta obliqua ad un piano, di tutti i piani che passano per questa retta, quello che interseca il piano dato secondo la perpendicolare alla proiezione dell'obliqua forma col piano dato il diedro minore.

323. Le proiezioni di rette parallele sopra un piano sono parallele oppure coincidenti. La reciproca non è vera. Ma se le proiezioni di due rette sopra due piani che s'incontrano sono parallele, anche le prime rette sono parallele.

324. Le proiezioni di segmenti eguali e paralleli sono eguali e parallele oppure coincidenti. La reciproca non è vera. Ma se le proiezioni di due segmenti sopra due piani che s'incontrano sono eguali e parallele, anche i primi segmenti sono eguali e paralleli.

325. La proiezione di un angolo retto è un angolo retto se uno dei lati è parallelo al piano di proiezione. Reciprocamente se la proiezione di un angolo sopra un piano parallelo ad un lato è un angolo retto, il primo angolo è retto?

326. Date tre rette sghembe a due a due, esiste una retta che ne incontra due, ed è parallela alla terza.

327. Date tre rette sghembe a due a due, esistono infinite rette che le incontrano tutte e tre: queste a due a due sono sghembe.

328. Date due rette sghembe ed un piano, esistono infinite rette che incontrano le due date e sono parallele al piano.

329. Altra dimostrazione del teor. 457. Si conduca un piano parallelo alle AB e CD (n. 456); di poi una retta perpendicolare a questo piano, e finalmente la parallela a questa che incontri le AB e CD (eserc. 335). Quest'ultima è la retta cercata.

330. Luogo dei punti equidistanti da tre punti dati non in linea retta; oppure da tre rette parallele (non nello stesso piano).

331. Luogo dei punti medi dei segmenti terminati a due rette sghembe.

332. Luogo dei piedi delle perpendicolari condotte alle rette di un fascio da un punto situato fuori del piano del fascio.

333. Luogo dei punti tali che la somma (o la differenza) delle distanze da due ~~punti~~ ^{rette} che s'incontrano sia eguale ad un segmento dato. (Cfr. cogli eserc. 64 e 65).

334. Luogo dei piani tali che la differenza dei quadrati delle distanze da due punti fissi è costante. (Cfr. eserc. 170).

(Dal § 8.º al § 14.º).

335. Dimostrare che la somma delle facce di un angoloide convesso è minore di quattro retti. (Si faccia una sezione con un piano che incontri tutti gli spigoli, e per ogni triedro col vertice in un vertice della sezione si applichi il teor. 472. Si sommino le diseguaglianze e si aggiunga ai due membri la somma delle facce dell'angoloide, ecc.).

336. In un triedro i piani perpendicolari alle facce condotti per le bisettrici delle facce stesse passano per una stessa retta. Questa nel triedro è il luogo dei punti equidistanti dai tre spigoli del triedro (eserc. 331).

337. In un triedro i piani bisettori dei diedri passano per una stessa retta; questa nel triedro è il luogo dei punti equidistanti dalle facce del triedro stesso (n. 447).

338. In un triedro i piani perpendicolari alle facce condotti per gli spigoli opposti passano per una retta. (Condotti due dei detti piani si tagli la figura con un piano perpendicolare alla loro intersezione; il triangolo sezione del triedro ha per altezze le intersezioni coi due primi piani, da cui...).

339. In un angoloide regolare i piani bisettori dei diedri ed i piani perpendicolari alle facce condotti per le bisettrici delle facce stesse passano per una stessa retta.

340. In un triedro i piani passanti per gli spigoli e per le bisettrici delle facce opposte passano per una retta. (Si prendano sugli spigoli del triedro a partire dal vertice tre segmenti eguali; e si consideri la sezione fatta col piano passante per gli estremi dei tre segmenti).

341. Se due angoloidi con una faccia in comune sono l'uno interno all'altro, la somma delle facce dell'interno è minore della somma delle facce dell'altro, purchè l'interno sia convesso.

342. In un triedro la somma degli angoli che un raggio condotto pel vertice internamente al triedro fa coi tre spigoli è compresa fra la somma e la semisomma delle facce del triedro.

343. In un triedro l'angolo che uno spigolo fa colla bisettrice della faccia opposta, se acuto, è minore della semisomma delle altre due facce e maggiore della semidifferenza; e maggiore anche della semidifferenza tra la somma delle prime due facce è la terza. (Per la prima parte se $VABC$ è il triedro e VM la bisettrice della faccia $\widehat{AVB}$, si faccia adiacente a $\widehat{CVM}$ l'angolo $\widehat{MVD} = \widehat{CVM}$; nel triedro $VADC$ è

$$\widehat{DVC} < \widehat{DVA} + \widehat{AVC};$$

considerando poi i triedri $VMBC$, $VMAD$ si deduce

$$\widehat{DVA} = \widehat{BVC}$$

da cui...; per le altre parti il n. 472).

344. In un triedro la somma degli angoli formati dagli spigoli colle bisettrici delle facce opposte è minore della somma delle facce; ed è maggiore della semisomma, se detti angoli sono acuti (es. precedente).

345. Se un triedro trirettangolo (triedro che ha per facce angoli retti) si taglia con un piano qualunque, il punto d'incontro delle altezze del triangolo sezione è la proiezione del vertice del triedro sul piano della sezione.

346. Se un triedro trirettangolo è segato da un piano, il triangolo determinato in ciascuna faccia è medio proporzionale tra il triangolo sezione e la sua proiezione sulla sezione stessa (proiezione di un triangolo è il triangolo che ha per vertici le proiezioni dei vertici). (Se $VABC$ è il triedro tri-

rettangolo, ABC la sezione, s'immagini il piano VAD perpendicolare a BC: si conduca l'altezza VH del triangolo rettangolo ABD, e si applichino i teor. n. 323, 1.^o e 286, 1.^o).

347. Dedurre dal teor. precedente che il quadrato dell'area del triangolo sezione è eguale alla somma dei quadrati delle aree dei triangoli determinati sulle tre facce del triedro.

348. In un triedro le perpendicolari agli spigoli condotti rispettivamente nei piani delle facce opposte giacciono in un piano. (Sia VABC il triedro, VH l'intersezione dei piani perpendicolari alle facce condotte per gli spigoli opposti (eserc. 338) ed ABC una sezione perpendicolare a VH; si immagini per V il piano parallelo al piano ABC; la sua intersezione col piano AVB è parallela ad ABC, ma questa è perpendicolare al piano CVH, dunque anche l'altra è perpendicolare allo stesso piano e perciò a VC; così per le altre).

349. (TEOREMA DI DESARGUES). Se due triangoli ABC, A'B'C' sono tali che le congiungenti AA', BB', CC' concorrono in un punto, le rette AB, A'B'; BC, B'C'; AC, A'C' s'incontrano in tre punti situati in linea retta e reciprocamente.

(Se i piani dei due triangoli non coincidono la dimostrazione è ovvia. Se coincidono si uniscano i punti A', B', C' con un punto M esterno al loro piano, ed i punti A, B, C, con un punto Q della retta MP (P è il punto di concorso delle rette AA', BB', CC'). Ora QA ed MA' s'incontrino in A''; QB ed MB'' in B''; QC ed MC'' in C''. Le coppie di triangoli ABC, A''B''C'' ed A'B'C', A''B''C'' si trovano nelle condizioni del primo caso, perciò... ecc.).

350. Luogo dei punti equidistanti da tre rette che passano per un punto (v. eserc. 336). Caso in cui le tre rette sono parallele a due a due.

351. Luogo dei punti equidistanti da tre piani che passano per un punto (v. eserc. 337). Caso in cui le intersezioni dei tre piani a due a due sono parallele.

352. Dato un punto ed un triedro, condurre per quel punto un piano che tagli gli spigoli del triedro in tre punti equidistanti dal vertice.

353. Tagliare un angoloide tetraedro in modo che la sezione sia un parallelogrammo. (I lati opposti della sezione sono entrambi paralleli alla intersezione delle facce corrispondenti ecc.).

CAPITOLO II

354. In un tetraedro i segmenti che uniscono i vertici col punto d'incontro delle mediane delle facce opposte (mediane del tetraedro) passano per uno stesso punto (baricentro del tetraedro) nel quale si dividono in parti l'una tripla dell'altra. (Sia ABCD il tetraedro, E il punto medio di CD; F, G i punti d'incontro delle mediane delle facce ACD, BCD; le mediane AG, BF del tetraedro s'incontrino in H; sarà FG parallelo ad AB ed eguale ad $\frac{1}{3}$ AB (vedi pag. 73 nota); dai triangoli simili ABH, FGH si ha poi....).

355. In un tetraedro i segmenti che uniscono i punti medi degli spigoli opposti si dimezzano scambievolmente nel baricentro del tetraedro (vedasi eserc. precedente).

356. Se due spigoli opposti d'un tetraedro sono ortogonali le perpendicolari condotte dalle estremità di uno di essi alle facce opposte (altezze del tetraedro) sono in un piano.

357. Se due spigoli d'un tetraedro sono ortogonali agli opposti, anche i rimanenti due spigoli sono ortogonali; le quattro altezze del tetraedro (vedi esercizio precedente) passano per uno stesso punto, nel quale passano anche le distanze degli spigoli opposti; le somme dei quadrati degli spigoli opposti sono equivalenti.

358. Se un tetraedro ha gli spigoli opposti a due a due eguali, le quattro facce sono eguali, e reciprocamente.

359. Se i diedri opposti d'un tetraedro sono a due a due eguali, le quattro facce sono eguali, e reciprocamente. (Si considerino due triedri e si dimostri che hanno tutti gli elementi eguali).

360. In un tetraedro a facce eguali le quattro mediane sono eguali (si considerino i triangoli AGE, BFE dell'esercizio 354 che sono eguali); i segmenti che uniscono i punti medi degli spigoli opposti sono anche le distanze dei medesimi (il triangolo AEB è isoscele); perciò il punto d'incontro delle mediane è equidistante dai vertici; è equidistante dalle facce; ed è equidistante dai punti medi degli spigoli.

361. Se in un tetraedro le mediane sono anche le altezze, quel tetraedro è regolare. (Nel triangolo AEB dell'eserc. 354 l'altezza del vertice E è mediana, perciò il triangolo è isoscele, ossia $AE = EB$, così per gli altri analoghi; allora le facce del tetraedro hanno le mediane che sono anche altezze e perciò sono regolari).

362. La somma dei quadrati degli spigoli di un tetraedro equivale a quattro volte la somma dei quadrati dei segmenti che uniscono i punti medi dei lati opposti (si fanno le sezioni medie e poi n. 218 cor.).

363. In una piramide quadrangolare retta la somma di due facce laterali non consecutive equivale alla somma delle altre due (n. 173).

364. In un prisma una faccia laterale è minore della somma delle altre.

365. In un plldo la somma dei quadrati degli spigoli equivale alla somma dei quadrati delle diagonali.

366. In un plldo i segmenti che uniscono i centri delle facce opposte si dimezzano scambievolmente nel centro del plldo.

367. La somma delle distanze dei vertici d'un plldo da un piano che non lo interseca è eguale a otto volte la distanza dallo stesso piano del centro del plldo. Modificare il teorema per un piano che interseca il plldo. Che cosa si deduce, se il piano passa pel centro del plldo?

368. La sezione fatta in un cubo con un piano condotto pel centro e perpendicolare ad una diagonale è un esagono regolare. (L'esagono ha per vertici i punti medi dei sei spigoli che non concorrono negli estremi della diagonale).

369. Se un esaedro ha le diagonali che si dimezzano scambievolmente in uno stesso punto, quell'esaedro è plldo.

370. In un prisma triangolare indefinito (limitato da tre striscie) a facce eguali (striscie) stanno opposti diedri eguali ed a facce diseguali diedri diseguali nello stesso senso.

371. I centri dei cerchi iscritti nelle facce di un tetraedro regolare sono vertici di un tetraedro regolare. Se ne trovi lo spigolo dato quello del primo.

372. I centri dei cerchi iscritti nelle facce di un cubo (ottaedro regolare) sono vertici di un ottaedro regolare (cubo) Se ne trovi lo spigolo, dato quello del primo poliedro.

373. I centri dei cerchi iscritti nelle facce di un dodecaedro (icosaedro) regolare sono vertici di un icosaedro (dodecaedro) regolare. Se ne trovi lo spigolo, dato quello del primo poliedro.

374. I punti medi degli spigoli d'un tetraedro regolare sono vertici d'un ottaedro regolare.

375. Un pllpdo è diviso da un piano diagonale in due prismi simmetrici rispetto al centro del pllpdo.

376. Se una figura ammette due piani principali, l'intersezione di questi piani è un asse di simmetria della figura.

Definizione. In un pllpdo unendo le estremità di tre spigoli che partono da uno stesso vertice si ottiene un triangolo che dicesi *triangolo diagonale*. Di siffatti triangoli ve ne sono otto. Ciò posto, dimostrare:

377. Gli otto triangoli diagonali di un pllpdo sono a due a due eguali, coi lati paralleli, e simmetrici rispetto al centro del pllpdo.

378. La diagonale del pllpdo che incontra due triangoli diagonali paralleli li incontra nei loro baricentri e viene divisa in tre parti eguali.

379. Quattro triangoli diagonali d'un pllpdo non paralleli sono facce d'un tetraedro, iscritto nel pllpdo. Vi sono due tetraedri iscritti così determinati, che sono eguali-opposti e simmetrici rispetto al centro del pllpdo; e questo è anche baricentro comune (es. 354) dei due tetraedri.

380. In un poliedro si ha che tanto $3f$ quanto $3v$ è $\leq 2s$; ed anche che tanto $3f$ che $3v$ è $> s + 6$. (Dove f , v , s hanno il significato del teorema 518).

(Contando i lati di ciascuna faccia si ha che $3f \leq 2s$ secondo che le facce sono tutte triangolari o no: contando gli spigoli degli angoloidi si ha che $3v \leq 2s$ secondo che gli angoloidi sono tutti triedri o no. Sostituendo poi in queste relazioni in luogo di f , o di v i valori dedotti dal teorema di Eulero si avranno le altre).

381. Dall'esercizio precedente dedurre che non vi può essere un poliedro con 7 spigoli.

CAPITOLO III

382. Due superficie cilindriche coassiali (collo stesso asse) non hanno punti comuni; due superficie coniche coassiali non hanno punti comuni, se non hanno lo stesso vertice, e le generatrici delle due superficie fanno angoli eguali coll' asse.

383. Due superficie coniche coassiali, dove le generatrici fanno angoli differenti coll' asse, si intersecano (se non hanno lo stesso vertice) secondo una circonferenza, il cui piano è perpendicolare all' asse di rotazione. Lo stesso dicasi di una superficie conica ed una cilindrica.

384. Due superficie coniche collo stesso vertice sono esterne l' una all' altra, col solo vertice comune, se l' angolo degli assi è maggiore della somma degli angoli delle due superficie: sono tangenti esternamente lungo una generatrice, se il primo angolo è eguale alla somma degli altri due; s' intersecano lungo due generatrici, se il primo angolo è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza; sono tangenti internamente lungo una generatrice, se il primo angolo è eguale alla differenza degli altri due; finalmente sono l' una interna all' altra, se il primo è minore della differenza degli altri due.

385. Due superficie cilindriche cogli assi paralleli sono esterne l' una all' altra e non hanno punti comuni, se la distanza degli assi è maggiore della somma dei raggi delle due superficie; sono tangenti esternamente lungo una generatrice, se la detta distanza è eguale alla somma dei raggi; si intersecano secondo due generatrici, se la distanza è minore della somma e maggiore della differenza dei due raggi; sono tangenti internamente lungo una generatrice; se la distanza è eguale alla differenza dei due raggi; e finalmente sono interne l' una all' altra senza punti comuni, se la distanza è minore della differenza dei raggi.

386. Una superficie cilindrica (od una conica) ed una superficie sferica col centro sull' asse di detta superficie o non hanno punti comuni, o si toccano, o si tagliano secondo circonferenze i cui piani sono perpendicolari all' asse. Distinguere i vari casi.

387. Se si denomina *fuso conico* (o *cilindrico*) la parte di superficie conica (o cilindrica) (rotonda) compresa fra due generatrici; ad ogni fuso corrisponde un arco della circonferenza direttrice; ed in una superficie conica (o cilindrica) i fusi conici (o cilindrici) sono proporzionali ai rispettivi archi.

388. Se si denomina *spicchio conico* o (*cilindrico*) quella parte di cono (o di cilindro) compresa fra due posizioni diverse del triangolo rettangolo (del rettangolo) generatore del cono (o del cilindro), dimostrate che gli spicchi conici (o cilindrici) sono proporzionali ai corrispondenti settori circolari *basi*.

389. Estendere alla superficie sferica gli esercizi 83, 85, non che il teor. 219.

390. Se due superficie sferiche si intersecano, le tangenti condotte alle due superficie sferiche da un punto del piano della circonferenza comune sono eguali. Reciprocamente se le tangenti condotte da un punto a due superficie sferiche si intersecano sono eguali, quel punto appartiene al piano della circonferenza comune alle due superficie sferiche. (Vedasi eserc. 163).

391. Se tre superficie sferiche s'intersecano a due a due, i piani delle tre circonferenze intersezioni passano per una stessa retta, perpendicolare al piano dei tre centri. Essa è il luogo dei punti tali che le tangenti condotte da uno di essi alle tre superficie sferiche sono eguali. (Eserc. precedente).

392. In un triangolo sferico un angolo esterno è minore della somma dei due interni non adiacenti e maggiore della loro differenza (per la seconda parte si consideri il triangolo adiacente avente un lato comune col primo e gli altri due che sono supplementi degli altri due del primo).

393. Nei triangoli sferici iscritti in uno stesso cerchio e con un lato comune è costante la differenza tra la somma degli angoli adiacenti al lato comune e l'angolo opposto. (Si unisca il centro del circolo circoscritto coi vertici).

394. I vertici dei triangoli sferici con un lato comune e dello stesso eccesso sferico (epperò equivalenti) giacciono nel cerchio circoscritto al triangolo, che ha per vertici il vertice opposto al lato comune ai primi e gli opposti agli altri due vertici. (Se ABC è uno dei triangoli sul lato $\widehat{AB}$ comune, ed

A' , B' gli opposti di A e B , l'eccesso sferico di ABC vale $2R - (B' + A' - C)$; ma $B' + A' - C$ è costante (eserc. precedente) pel cerchio circoscritto ad $A'B'C$, perciò, ecc.). (Teorema di Lexell),

395. In un triangolo sferico gli archi di circonferenza massima condotti per i vertici e perpendicolari ai lati opposti passano per uno stesso punto. (Esercizio 338).

396. Luogo dei punti che hanno da due rette parallele distanze date.

397. Luogo delle rette passanti per un punto di un piano ed egualmente inclinate sul piano stesso.

398. Luogo degli spigoli dei diedri eguali ad un diedro dato, le cui facce passino per due rette parallele (confr. col n. 164).

399. Luogo dei punti che hanno da due punti dati distanze date.

400. Luogo dei centri di circoli sezioni di un fascio di piani con una sfera.

401. Luogo dei piedi delle perpendicolari condotte da un punto ai piani, od alle rette di una stella.

402. Luogo dei punti tali che la somma dei quadrati delle distanze da due punti fissi è costante. (Ved. eserc. 169).

403. Luogo dei punti tali che le loro distanze da due punti fissi sono in un rapporto dato. (Ved. n. 342).

404. Iscrivere e circoscrivere una superficie conica ad un triedro; lo stesso per un angoloide regolare.

405. Iscrivere e circoscrivere una superficie cilindrica ad una superficie prismatica triangolare; lo stesso per una superficie prismatica di cui la sezione retta è un poligono regolare.

406. Per un punto condurre un piano tangente ad una superficie conica o cilindrica data.

407. Condurre un piano tangente ad una superficie conica o cilindrica parallela ad una retta data.

408. Condurre un piano tangente comune a due superficie sferiche. Quante soluzioni ha il problema?

409. Calcolare i raggi delle sfere circoscritte ed iscritte ai cinque poliedri regolari. (Pei primi tre il problema è assai facile. Per l'icosaedro si può approfittare del fatto, che il diametro della sfera circoscritta è diagonale d' un rettangolo

di cui due lati sono spigoli opposti del poliedro, e gli altri due sono diagonali d'un pentagono regolare col lato eguale allo spigolo del poliedro. Si deduce poi il raggio della sfera iscritta. Pel dodecaedro si osservi che il diametro della sfera iscritta è anche diametro della circoscritta all'icosaedro reciproco, che ha per vertici i centri dei cerchi iscritti nelle facce; si deduce poi il raggio della sfera circoscritta).

CAPITOLO IV

410. Un prisma triangolare equivale al pllpdo che ha per base la metà d'una faccia laterale e per altezza la distanza da questo dello spigolo opposto.

411. Se sopra tre rette parallele e non situate nello stesso piano si prendono tre segmenti eguali ad un segmento dato, i prismi triangolari così determinati sono equivalenti.

412. Enunciare e verificare i teoremi geometrici rappresentati dalle seguenti relazioni:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 + 3a.b. (a \pm b)$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b). (a^2 \mp ab + b^2).$$

413. La somma o la differenza di due piramidi collo stesso vertice in un punto qualunque ed avente per basi le basi di un prisma equivale al terzo del prisma stesso. Distinguere i due casi.

414. In un tetraedro unendo il baricentro (eserc. 354) coi quattro vertici si decompone il tetraedro in quattro tetraedri equivalenti.

415. Un tetraedro è diviso in due parti equivalenti dal piano determinato da uno spigolo e dal punto medio dello spigolo opposto.

416. Un pllpdo è decomposto in sei piramidi equivalenti dai piani diagonali.

417. Un cubo è sestuplo dell'ottaedro che ha per vertici i centri delle due facce.

418. Un tronco di prisma triangolare equivale al prisma che ha per base la sezione retta e per altezza la distanza fra i baricentri delle basi (punti d'incontro delle mediane delle basi). (Eserc. 215).

419. Un tronco di pllpdo (che si ottiene tagliando un

pllpdo con un piano non parallelo alla base e che incontri le quattro facce laterali) equivale al pllpdo che ha per base la sezione retta e per altezza le distanze fra i centri delle basi.

420. Un tetraedro è la terza parte del pllpdo circoscritto (Vedasi eserc. 379).

421. Un tetraedro equivale ai due terzi del pllpdo che ha per base la sezione media (il pllgr che ha per vertici i punti medi di due coppie di spigoli opposti) e per altezza la distanza degli altri due spigoli opposti. (Vedasi eserc. precedente).

422. Due tetraedri che hanno due spigoli opposti rispettivamente eguali, egualmente inclinati ed equidistanti, sono equivalenti (si considerino i pllpdi circoscritti).

423. Sia l'esagono regolare ABCDEF una base di un prisma retto. Sul prolungamento dell'*asse del prisma* (segmento che unisce i centri delle basi), dalla banda opposta a quella dove sta il prisma rispetto alla base considerata, si prenda un punto O e si conducano i piani OAC, OCE, OEA che incontrino gli spigoli, che terminano ai vertici B, D, F rispettivamente in H, L, M. Dimostrare:

1.^o che le sezioni OAHC, OCLE, OEMA sono rombi:

2.^o che la somma dei tre tetraedri staccati dal prisma equivale al tetraedro aggiunto OACE; perciò il prisma dato equivale al decaedro risultante ⁽¹⁾.

424. Trasformare un prisma in un pllpdo rettangolo di data altezza.

425. Trasformare un prisma in un altro di base data. (Si trasforma il prisma in un pllpdo rettangolo ed il poligono dato in un rettangolo con un lato eguale ad uno spigolo del pllpdo ecc.).

426. Costruire un prisma equivalente alla somma di più prismi dati. (Si trasformano i prismi dati in pllpdi rettangolari della stessa altezza).

427. Trasformare un tetraedro in un altro di data al-

⁽¹⁾ Le celle delle api hanno appunto la forma di tali decaedri. In esse il punto O è preso ad una distanza dalla base ABCDEF eguale ad un quarto della diagonale del quadrato fatto sul lato dell'esagono base. In questo caso il decaedro presenta, come si dimostra, la superficie minima.

tezza. (Sia ABCD il tetraedro: il piano alla distanza data dalla base BCD tagli AB in E: si costruisca il triangolo $EBF = ABD$ (ved. es. 171); il tetraedro EBCF è il cercato).

428. Decomporre un tetraedro in due parti equivalenti con un piano condotto per un punto di uno spigolo. (Si trasformi prima in un tetraedro avente quel punto come vertice; eserc. precedente.).

429. Costruire una piramide somma di più piramidi. (Eserc. precedente).

430. Trovare le aree ed i volumi dei cinque poliedri regolari in funzione dello spigolo. (Pei volumi si calcoli prima il raggio della sfera iscritta; ved. eserc. 409).

431. Trovare le aree ed i volumi dei poliedri che si ottengono troneando i cinque poliedri regolari con piani passanti per i punti medi degli spigoli in funzione dello spigolo di ciascun poliedro.

432. Tagliare un tetraedro regolare con un piano parallelo a due spigoli opposti in modo che la sezione abbia un'area data a^2 .

433. Trovare il volume del tetraedro che ha per base un triangolo di lati a, b, c e gli altri tre spigoli eguali ad l . Come si riduce la formola nel caso di $a = b = c$?

434. Trovare il volume del romboedro acuto e del romboedro ottuso date le diagonali p, q delle facce. (Si cerchi il volume del tetraedro che ha per base il triangolo di tre diagonali eguali per mezzo dell'eserc. precedente).

435. La questione dell'esercizio precedente dato lo spigolo a del romboedro ed una diagonale p .

436. Il volume di un tronco di piramide è dato dalla formola:

$$V = \frac{1}{3} h \left(\frac{B + b}{2} + b' \right)$$

dove h è l'altezza, B e b le due basi e b' la sezione media parallela alle basi. (Vedasi eserc. 251).

437. Se si indicano con x, y, z, t le distanze di un punto dalle facce d'un tetraedro, e si dà a ciascuna il segno $+$ o il segno $-$ secondo che rispetto alla faccia a cui è perpendicolare è dalla stessa banda dell'altezza corrispondente o da bande opposte, dimostrare le seguenti relazioni:

$$f_1 x + f_2 y + f_3 z + f_4 t = 3V$$

$$\frac{x}{h_1} + \frac{y}{h_2} + \frac{z}{h_3} + \frac{t}{h_4} = 1$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}$$

dove f_1, f_2, f_3, f_4 sono le facce, h_1, h_2, h_3, h_4 le altezze corrispondenti ad x, y, z, t ; V il volume del tetraedro, r il raggio della sfera iscritta. (Ved. eserc. 188, 189 correlativi).

438. Se si unisce un punto O interno al tetraedro $ABCD$ coi vertici, e si prolungano i segmenti OA, OB, OC, OD ad incontrare le facce opposte in A', B', C', D' si ha:

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} + \frac{OD'}{DD'} = 1.$$

(I rapporti $\frac{OA'}{AA'}, \dots$ si dimostrano eguali al rapporto $\frac{x}{h_1} \dots$ dell' eserc. precedente).

439. Il fuso conico (eserc. 387) equivale al triangolo dell' arco e della generatrice.

440. Il fuso cilindrico (eserc. 387) equivale al rettangolo dell' arco e della generatrice.

441. Le superficie laterali dei coni generati dalla rotazione di un triangolo rettangolo intorno ai cateti sono inversamente proporzionali ai cateti fissi. Lo stesso dicasi dei solidi.

442. Le superficie laterali dei cilindri generati dalla rotazione di un rettangolo intorno a' suoi lati sono equivalenti. I solidi sono inversamente proporzionali ai lati fissi.

443. La calotta sferica equivale al cerchio che ha per raggio la corda dell' arco generatore.

444. La superficie sferica equivale alla superficie laterale del cilindro equilatero circoscritto, ed a due terzi di quella del cono equilatero circoscritto (un cilindro od un cono sono circoscritti ad una sfera se le loro superficie laterali e le loro basi sono tangenti alla superficie della sfera).

445. Le calotte che una superficie sferica determina sopra delle superficie sferiche che passano pel centro della prima sono equivalenti. (Eserc. 443).

446. Le zone che due superficie sferiche concentriche determinano sopra delle superficie sferiche che passano pel centro comune alle due prime sonò equivalenti. (Eserc. 443,

osservando che una zona può considerarsi come differenze di due calotte).

447. La superficie generata dal contorno di un triangolo equilatero, che rota intorno ad un asse del suo piano che non lo attraversi, equivale al rettangolo del contorno stesso e della circonferenza descritta dal baricentro.

448. La superficie totale del cilindro circoscritto ad una sfera è media proporzionale fra le superficie della sfera e del cono equilatero circoscritto. Lo stesso dicasi della superficie del cilindro equilatero iscritto, della superficie della sfera e di quella del cono equilatero iscritto (un cilindro ed un cono sono iscritti in una sfera quando le circonferenze basi (ed il vertice) sono sulla superficie della sfera).

449. Nella fig. 273 del testo la superficie generata dalla semicirconferenza AE è media proporzionale fra le superficie generate dai semiperimetri regolari simili $ABCDE$, $(ABCDE)'$.

450. Lo spicchio conico (eserc. 388) equivale ad un terzo del plpdo del settore circolare base e dell'altezza.

451. Lo spicchio cilindrico (eserc. 388) equivale al plpdo del settore base e dell'altezza.

452. Si domanda la differenza tra il tronco di cono ed il cilindro della stessa altezza, dove il cilindro ha per base la sezione media del tronco di cono.

453. Un cilindro ed un tronco di cono hanno in comune una base e l'altezza: il rapporto dei loro volumi è m . Trovare il rapporto dei raggi delle altre due basi.

454. In un cono sono iscritte due sfere in modo che la maggiore tocca la minore e la base del cono. Trovare il volume del cono, dati i raggi r , r' delle sfere.

455. Il raggio della base di un cono è r : determinarne l'altezza in modo che il cono stesso sia equivalente alla sfera che ha per diametro l'altezza stessa.

456. Un involucro sferico equivale al tronco di cono che ha per altezza la differenza dei raggi e le basi equivalenti alle superficie sferiche che lo limitano (involucro sferico è il solido limitato da due superficie sferiche concentriche). Lo stesso vale per una parte di involucro limitata dalle sezioni fatte da una superficie conica col vertice nel centro delle sfere.

457. Trovare il volume del cono considerandolo come

limite delle somme dei cilindri iscritti e circoscritti, analogamente a quanto si è fatto pel tetraedro al n. 620. (Conviene però usare della formola che si terrà dimostrata :

$$\lim_{n = \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots, n^2}{n^3} = \frac{1}{3}.$$

458. Sia ABCD un quadrato; centro A e raggio AB descrivasi il quadrante ABD; si conduca la diagonale AC. Se si fa una sezione con una retta parallela ad AD che incontri AB, AC l'arco $\widehat{BD}$ e CD rispettivamente in E, G, H, dimostrare che: $EG^2 + EH^2 = EF^2$. Se si fa rotare la figura attorno ad AB si ottiene un cono, un emisfero ed un cilindro. Dimostrare che l'emisfero è due terzi del cilindro e dedurne il volume della sfera. (Fatte n sezioni come la EGHF, si considerino i detti solidi, come i limiti dei cilindri, iscritti o circoscritti ai medesimi, aventi per basi le dette sezioni e per altezze le distanze di due sezioni consecutive, quando n cresce indefinitamente; vedasi anche eserc. precedente).

459. Dall'esercizio precedente dedurre che il cono generato dal triangolo ABC equivale al solido (scodella) generato dal triangolo mistilineo BCD; e che un piano parallelo alla base del cono taglia il cono e la scodella rispettivamente secondo un cerchio ed una corona circolare che sono equivalenti.

460. Il volume del solido generato da un triangolo che rota intorno ad un lato è dato dal prodotto dell'area del triangolo per la circonferenza descritta dal baricentro.

461. Il volume del segmento sferico ad una base è dato da:

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h \right)$$

dove R è il raggio della sfera ed h l'altezza del segmento. (Si può dedurre dalla formola data al n. 662 per mezzo del n. 214 o direttamente).

462. Determinare i lati d'un triangolo rettangolo conoscendo l'area s^2 del triangolo ed il volume v^3 del solido generato dal triangolo stesso che rota intorno alla ipotenusa.

463. Indicando con v , v_1 , v_2 , i volumi dei solidi generati da un triangolo rettangolo che ruota successivamente intorno all'ipotenusa ed a ciascuno dei cateti, si ha:

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2}.$$

464. Un triangolo equilatero di lato l ruota intorno ad un asse del suo piano che passa per un vertice e non lo attraversa. Trovare quale posizione deve avere il triangolo, perchè il solido generato sia massimo, e l'espressione del volume di questo solido.

465. La stessa questione per un quadrato.

466. Dividere un triangolo con una retta parallela ad un lato in due parti tali, che i solidi generati dalle due parti rotanti intorno a quel lato, sieno equivalenti.

467. Dato un triangolo ABC rettangolo in A, determinare un punto M sull'ipotenusa in modo, che i solidi generati dai triangoli AMB, AMC ruotanti rispettivamente intorno ai cateti AB, AC sieno:

1.° equivalenti;

2.° proporzionali ai cateti stessi;

3.° inversamente proporzionali ai cateti.

468. In un triangolo ABC trovare un punto M tale, che i solidi generati dai triangoli MBC, MCA, MAB ruotanti rispettivamente intorno a lati BC, CA, AB sieno equivalenti. (Chiamando x , y , z le distanze del punto M dai lati:

$$BC = a, CA = b, AB = c,$$

si trova che:

$$x = \frac{2s}{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \sqrt{a}}$$

dove s è l'area del triangolo; analogamente per y e per z).

469. La stessa questione, supposto che i solidi generati debbano essere proporzionali ai lati stessi (centro del cerchio iscritto).

470. La stessa questione, supposto che i solidi debbano essere inversamente proporzionali ai lati stessi (baricentro).

471. Sui cateti AB, AC d'un triangolo rettangolo si costruiscano due triangoli rettangoli ed isosceli ABD, ACE. I punti D, A, E sono allineati. Trovare l'espressione della superficie S e del volume V del tronco di cono generato dal trapezio DBCE che ruota intorno a DE ed il volume V' generato dal triangolo BC, in funzione di $BC = a$ e dell'altezza corrispondente h . Studiare come variano S , V , $\frac{V}{V'}$ al variare di h .

$$\left(S = \frac{\pi a}{2} \sqrt{2a(a+2h)}, \quad V = \frac{\pi a}{12} (a+h) \sqrt{2a(a+2h)}, \right. \\ \left. V' = \frac{\pi ah}{6} \sqrt{2a(a+2h)} \right)$$

472. Trovare il volume di un cono sapendo che lo sviluppo della sua superficie laterale è un settore di raggio l e di ampiezza n° (in gradi).

473. Trovare i raggi delle basi di un tronco di cono conoscendone l'altezza, l'apotema e l'area laterale, oppure il volume.

474. Trovare l'area laterale, la totale ed il volume del cono equilatero dato il lato.

475. Le stesse ricerche sul cilindro equilatero.

476. Un cilindro iscritto in una sfera di raggio dato ha l'area laterale che è la metà di quella del cerchio massimo della sfera. Trovarne il volume.

477. Di una caldaia cilindrica terminata da due emisferi si conosce l'area totale a^2 e la lunghezza della sezione meridiana b . Trovare il raggio e l'altezza della parte cilindrica (per un valore del raggio risulta la corrispondente altezza negativa: come si può interpretare?).

478. Dividere una sfera con un piano in due calotte tali, che una di esse sia media proporzionale fra l'altra e il cerchio sezione.

479. Dividere con un piano una superficie sferica in sezione aurea. Come vien diviso il diametro perpendicolare al piano della sezione?

480. Segare una sfera con due piani paralleli equidistanti dal centro in modo che la zona compresa sia equivalente alla somma delle due sezioni.

481. Supposta la terra di forma sferica, che parte di superficie vedrebbe chi si elevasse ad un'altezza dalla superficie eguale al raggio? A quale altezza converrebbe elevarsi per vederne la sesta parte?

482. Dividere una superficie sferica in parti equivalenti, o proporzionali a segmenti dati con piani paralleli.

483. Diviso un diametro di una sfera in n parti eguali, si conduca per i punti di divisione i piani perpendicolari al diametro. Trovare i rapporti dei successivi segmenti sferici alla sfera.

484. Trovare l'area della superficie ed il volume della sfera circoscritta ad un poliedro regolare di dato spigolo; non che l'area, della calotta ed il volume del segmento sferico determinato dal piano di una faccia (Ved. eserc. 409).

485. Determinare il volume d'una lente biconvessa conoscendone lo spessore e i raggi delle superficie sferiche di cui fanno parte le calotte che la limitano.

486. Il punto P di una sfera di raggio r è il vertice di un cono che ha per asse il diametro PQ della sfera e per base il cerchio di centro Q e raggio eguale a quello della sfera. Con un piano parallelo alla base tagliare la figura in modo che le aree delle sezioni fatte nel cono e nella sfera stieno tra loro in un rapporto dato m .

487. La medesima questione dell'es. precedente, ove però m rappresenta il rapporto fra le superficie del tronco di cono e della calotta sferica comprese fra gli stessi piani.

CAPITOLO VI

488. Un piano parallelo a due spigoli opposti d'un tetraedro divide gli altri quattro in parti proporzionali.

489. In un tetraedro il piano bisettore di un diedro divide lo spigolo opposto in parti proporzionali alle due facce che comprendono il diedro.

490. Se un piano taglia le due coppie di spigoli opposti AB, CD e AC, BD d'un tetraedro ABCD rispettivamente nei punti E, G, F, H si ha:

$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BH}{HD} \cdot \frac{DG}{GL} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$$

(Si applichi il teorema di Menelao (Appendice Es. plan.^a 1.^o Teorema) ai triangoli ABC, BCD tagliati dalle trasversali EF, GH che incontrano il lato comune ai due triangoli in un punto P e si elimini dalle due relazioni il rapporto BP : PC).

491. Se E, G sono i punti medi di due spigoli opposti AB, CD di un tetraedro ABCD, il tetraedro è diviso in due parti equivalenti da un piano che passa per i punti E, G.

(Se EFGH è la sezione del tetraedro si immaginino i piani AGH, BGF. Si dimostra l'equivalenza dei tetraedri AHGD, BCGF cercando il rapporto di ciascuno di essi al

dato tetraedro e approfittando dell' esercizio precedente. Quanto alle piramidi rimanenti AEF $\overline{G}$ H, BEFGH l'equivalenza è manifesta).

492. Due tetraedri sono simili se hanno:

1.^o una faccia simile adiacente a tre diedri eguali ciascuno a ciascuno;

2.^o tre facce simili ciascuna a ciascuna;

3.^o cinque diedri eguali ciascuno a ciascuno;

e gli elementi nominati similmente posti.

493. Il tetraedro che ha per vertici i baricentri delle facce di un tetraedro dato è simile-opposto a questo. Qual'è il rapporto dei due tetraedri?

494. I piani passanti per i vertici d'un tetraedro e paralleli alle facce opposte determinano un secondo tetraedro simile-opposto al primo. Trovare il rapporto dei due tetraedri.

495. Se due poliedri simili (o simili-opposti), come nella fig. 281, hanno i segmenti omologhi paralleli, le congiungenti i vertici omologhi concorrono in uno stesso punto.

496. I quadrati dei volumi di due solidi simili stanno come i cubi delle loro superficie.

497. Due fusi conici o cilindrici, due spicchi conici o cilindrici sono simili, se appartengono a coni o cilindri simili, e gli archi corrispondenti sono simili. (Ved. eserc. 387 e 388).

498. Determinare gli spigoli d'un pllpdo rettangolo di volume V e simile al pllpdo rettangolo di spigoli a, b, c .

499. Trovare due segmenti che sieno nel rapporto di due cubi. (Si approfitti della relazione che se

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \text{ si ha } \frac{a^3}{b^3} = \frac{a}{d} \Big).$$

500. Dividere la superficie laterale d'una piramide, o d'un cono, in parti equivalenti, o proporzionali a segmenti dati con piani paralleli alla base.

501. Lo stesso per i solidi piramide e cono.

502. Lo stesso per la superficie laterale di un tronco di cono.

503. Lo stesso per un tronco di cono, dati i raggi delle due basi e l'altezza.

INDICE

INDICE

Preliminari

§ 1.° Gli enti geometrici — Postulati	Pag. 1
§ 2.° La retta	» 11
§ 3.° Il piano	» 13

Parte prima — PLANIMETRIA

CAPITOLO PRIMO

Rette ed angoli — Prime nozioni sul cerchio

§ 1.° I segmenti	» 18
§ 2.° Le spezzate — Linee equivalenti	» 20
§ 3.° Gli angoli	» 23
§ 4.° Circonferenza e cerchio	» 27
§ 5.° Generalità sulle grandezze	» 31
§ 6.° Alcuni teoremi sugli angoli — Rette perpendicolari	» 35
§ 7.° Rette parallele	» 38

CAPITOLO SECONDO

I poligoni

§ 1.° Definizioni	» 45
§ 2.° Alcuni teoremi sui poligoni — Sugli angoli	» 48
§ 3.° Sui lati	» 50
§ 4.° Sull'eguaglianza dei triangoli e dei poligoni	» 53
§ 5.° Figure eguali direttamente ed inversamente	» 57
§ 6.° Proprietà del triangolo isoscele — Applicazione alla risoluzione di alcuni problemi	» 60
§ 7.° Quadrilateri	» 64
§ 8.° Distanze e luoghi geometrici	» 68

CAPITOLO TERZO

Il cerchio

§ 1.° Angoli al centro, archi, settori	Pag. 75
§ 2.° Corde	» 77
§ 3.° Posizioni relative di una retta e di una circonferenza e di due circonferenze	» 82
§ 4.° Angoli al cerchio	» 89
§ 5.° Alcuni problemi	» 91
§ 6.° Poligoni iscritti e circoscritti	» 105
§ 7.° Simmetria rispetto ad un punto	» 113
§ 8.° Simmetria rispetto ad una retta	» 116

CAPITOLO QUARTO

Poligoni equivalenti

§ 1.° Definizioni	» 120
§ 2.° Trasformazione dei poligoni in rettangoli e quadrati	» 124
§ 3.° Alcuni teoremi sui quadrati e rettangoli dei segmenti divisi in parti — Alcune conseguenze del teorema di Pitagora	» 134
§ 4.° Seganti nel cerchio — Teorema di De Paolis e sue conseguenze	» 140
§ 5.° Alcuni problemi	» 146

CAPITOLO QUINTO

Misura delle grandezze — Grandezze proporzionali

§ 1.° Grandezze commensurabili ed incommensurabili	» 155
§ 2.° Misura delle grandezze commensurabili (e misura approssimata delle incommensurabili)	» 163
§ 3.° Classi e serie di grandezze — Grandezze limiti	» 169
§ 4.° Grandezze di terza specie	» 182
§ 5.° Misura delle grandezze incommensurabili	» 186
§ 6.° Rapporti e proporzioni fra grandezze	» 195
§ 7.° Grandezze direttamente proporzionali	» 205
§ 8.° Grandezze inversamente proporzionali	» 215
§ 9.° Misura dei segmenti, degli angoli ecc. e dei poligoni	» 219
§ 10.° Applicazioni della teoria della misura	» 223

CAPITOLO SESTO

Le figure simili

MISURE DEL CERCHIO E DELLA CIRCONFERENZA

§ 1.° Segmenti proporzionali	Pag. 239
§ 2.° Triangoli simili	» 243
§ 3.° Poligoni simili	» 247
§ 4.° Figure simili direttamente ed inversamente	» 251
§ 5.° Gruppi armonici	» 255
§ 6.° Problemi	» 260
§ 7.° Superficie dei poligoni simili	» 263
§ 8.° Problemi	» 267
§ 9.° Figure omotetiche	» 270
§ 10.° Poligoni regolari iscritti e circoscritti	» 280
§ 11.° Misura della circonferenza e del cerchio	» 287
§ 12.° Calcolo del numero π	» 299

Parte seconda - STEREOMETRIA

CAPITOLO PRIMO

Rette e piani perpendicolari e paralleli Angoli diedri e poliedri

§ 1.° Determinazione e genesi del piano	» 304
§ 2.° Rette e piani perpendicolari	» 309
§ 3.° Rette e piani paralleli	» 312
§ 4.° Angoli diedri	» 315
§ 5.° Piani perpendicolari	» 321
§ 6.° Piani paralleli	» 323
§ 7.° Distanze e luoghi — Angolo di una retta con un piano	» 328
§ 8.° Rette nello spazio	» 331
§ 9.° Angoloidi — definizioni	» 334
§ 10.° Angoloidi triedri e poliedri opposti e supple- mentari	» 336
§ 11.° Alcuni teoremi sugli angoloidi triedri e poliedri — Sulle facce	» 340
§ 12.° Sui diedri	» 343
§ 13.° Teoremi sull'eguaglianza degli angoloidi triedri e poliedri.	» 345
§ 14.° Angoloidi regolari	» 350

CAPITOLO SECONDO

I poliedri

§ 1.° Definizioni	Pag. 351
§ 2.° Piramide e tronco di piramide	» 352
§ 3.° Prisma e parallelepipedo	» 357
§ 4.° Poliedri regolari	» 362
§ 5.° Alcuni teoremi sui poliedri	» 366
§ 6.° Figure eguali ed eguali-opposte	» 367

CAPITOLO TERZO

I corpi rotondi

§ 1.° La superficie conica, il cono ed il tronco di cono	» 371
§ 2.° La superficie cilindrica ed il cilindro	» 375
§ 3.° La superficie sferica e la sfera — Superficie e solidi di rotazione	» 379
§ 4.° Poligoni e piramidi sferiche	» 388
§ 5.° Poliedri iscritti e circoscritti	» 392
§ 6.° Simmetria rispetto ad un punto	» 396
§ 7.° Simmetria rispetto ad una retta	» 396
§ 8.° Simmetria rispetto ad un piano	» 399

CAPITOLO QUARTO

Poliedri equivalenti

§ 1.° Definizioni	» 401
§ 2.° Equivalenza di prismi e parallelepipedi	» 403
§ 3.° Equivalenza di piramidi e tronchi di piramide e di prisma	» 411
§ 4.° Misura dei poliedri	» 421

CAPITOLO QUINTO

I corpi rotondi e le loro superficie — Loro misura

§ 1.° Superficie dei corpi rotondi — Loro misura	» 426
§ 2.° I corpi rotondi — Loro misura	» 439

CAPITOLO SESTO

Figure simili

§ 1.° Poliedri simili — Rapporto dei poliedri e delle loro superficie	» 450
§ 2.° Figure simili e simili - opposte	» 457
§ 3.° Figure omotetiche	» 461

ESERCIZI

PARTE PRIMA — Esercizi di planimetria	» 465
APPENDICE	» 498
PARTE SECONDA — Esercizi di stereometria	» 301

